
Manuale di SAV

Piano dell'opera:

Questo volume: ► **Volume 1. Teoria**

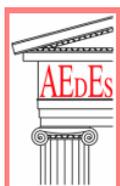
Volume 2. Manuale d'uso

Volume 3. Esempi applicativi - Procedure di validazione

Tutti i diritti sono riservati, anche di riproduzione parziale, a norma di legge e delle convenzioni internazionali. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta in qualsiasi forma o mezzo elettronico o meccanico, per alcun uso, senza il permesso scritto della AEDES Software per Ingegneria Civile.

Edizione 2012

Autore: Ing. Francesco Pugi



© **AEDES** Software per Ingegneria Civile
Via F. Aporti 32 - 56028 SAN MINIATO (PI)
Tel.: **0571.401073** - Fax: **0571.401173**
E-mail: **info@aedes.it** - Internet: **www.aedes.it**

AVVERTENZE E CONDIZIONI D'USO

La AEDES Software si riserva il diritto di apportare miglioramenti o modifiche al programma SAV, descritto nella documentazione ad esso associata, in qualsiasi momento e senza preavviso.

Il software e la documentazione allegata, anche se curati con scrupolosa attenzione, non possono comportare specifiche responsabilità di AEDES per involontari errori o inesattezze: pertanto, l'utilizzatore è tenuto a controllare l'esattezza e la completezza del materiale utilizzato. Le correzioni relative ad eventuali errori tipografici saranno incluse nelle versioni di aggiornamento.

SAV è di esclusiva proprietà della AEDES e viene concesso in uso non esclusivo secondo i termini e le condizioni riportati nel contratto di licenza d'uso. L'utente non avrà diritto ad utilizzare SAV fino a quando non avrà sottoscritto la suddetta licenza d'uso.

L'utente è responsabile della scelta di SAV al fine del raggiungimento dei risultati voluti, nonché dell'installazione, dell'uso dello stesso e dei relativi risultati.

Le sole garanzie fornite dalla AEDES in merito a SAV sono quelle riportate nella licenza d'uso. La AEDES non garantisce che le funzioni contenute in SAV soddisfino le esigenze dell'utente o funzionino in tutte le combinazioni che possono essere scelte per l'uso da parte dell'utente.

I nomi dei prodotti citati nella documentazione di SAV possono essere marchi di fabbrica o marchi registrati dalle rispettive Società.

INDICE

1. INTRODUZIONE 5

- 1.1. NORMATIVA DI RIFERIMENTO 7
- 1.2. BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO 10

2. COMPORTAMENTO STATICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA 11

- 2.1. GENERALITA' 11
- 2.2. L'ARCO IN MURATURA 12

3. STABILITA' DEGLI ARCHI: L'ANALISI LIMITE 16

- 3.1. IPOTESI DI BASE 16
- 3.2. COEFFICIENTE DI SICUREZZA 21
- 3.3. MODELLO MATEMATICO 23
 - 3.3.1. FORMULAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA 23
 - 3.3.2. METODO DELL'INVERSA GENERALIZZATA 26
 - 3.3.2.1. RISOLUZIONE DEL SISTEMA RETTANGOLARE 26
 - 3.3.2.2. INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI DI SEGNO 28
 - 3.3.2.3. APPLICAZIONI AVANZATE 30
 - 3.3.2.3.1. MASSIMA INTENSITA' DI CARICO 30
 - 3.3.2.3.2. ARCO DI MINIMO SPESSORE
E COEFFICIENTE DI SICUREZZA 31
 - 3.3.2.3.3. POSIZIONE DEL CARICO PIU' SFAVOREVOLE 31
 - 3.3.2.3.4. VERIFICHE DI RESISTENZA;
AZIONI SULLE IMPOSTE 32
 - 3.3.2.4. INSERIMENTO DI CATENE 33
 - 3.3.2.5. CONSOLIDAMENTO CON CAPP A IN CALCESTRUZZO 34
 - 3.3.2.6. CONSOLIDAMENTO CON COMPOSITI FIBRORINFORZATI 35
 - 3.3.3. ESEMPIO DI CALCOLO 36
- 3.4. CONFRONTO CON IL METODO DEL MÉRY 41

4. ANALISI SISMICA 42

CONVENZIONI TIPOGRAFICHE

Nel testo vengono richiamati paragrafi del D.M.14.1.2008 (NTC08) attraverso il simbolo **§** seguito dal numero del paragrafo (seguendo l'impostazione delle norme, **§C** indica il corrispondente paragrafo della Circolare applicativa di NTC08). Ad esempio:

Per il periodo proprio T1 dell'intera struttura può essere adottato il valore semplificato secondo §7.3.3.2 (...)

I riferimenti ai paragrafi del presente Manuale d'uso sono invece preceduti dal simbolo p.:

La consultazione dei risultati attraverso il Rapporto di Elaborazione è descritta nel p. 6.3 di questo Manuale (...)

Per i riferimenti bibliografici, si utilizzano le parentesi quadre con sigla identificativa dell'opera:

[8] significa il riferimento bibliografico 8; quando si fa riferimento ad un paragrafo specifico dell'opera, al riferimento bibliografico segue il simbolo §: [8],§9.3.4 indica il paragrafo 9.3.4 dell'opera [8].

Le seguenti simbologie evidenziano note, osservazioni e approfondimenti:



Suggerimento

Consigli per ottimizzare l'utilizzo del software.



Nota bene

Osservazioni e note che è opportuno conoscere.



Importante!

Da sapere: informazioni tecniche, approfondimenti, riferimenti normativi.



Attenzione

Da sapere assolutamente: aspetti particolarmente delicati.

1. INTRODUZIONE

Ci proponiamo di studiare il comportamento statico degli archi e delle volte in muratura. Faremo riferimento agli archi, comprendendo quindi il caso delle volte a botte, di cui l'arco è una sezione trasversale; per volte di altra natura, sarà preliminarmente richiesta la scomposizione in archi semplici.

Per arco in muratura si intende una struttura, convenzionalmente monodimensionale, costituita da elementi lapidei o in laterizio, detti conci, posti direttamente in mutuo contrasto o assemblati con interposizione di letti di malta.

L'analisi degli archi in conci di pietra o in muratura di mattoni può essere affrontata facendo riferimento a due schematizzazioni diverse a seconda che l'obiettivo che ci si prefigge di cogliere consista nel determinare:

- (1) il grado di stabilità, oppure
- (2) lo stato di sforzo e la configurazione deformata della struttura per assegnate condizioni di carico e/o cedimenti.

Nel primo caso, trattandosi di una analisi limite della struttura, nota la geometria e la posizione dei carichi, si fa ricorso a procedimenti che permettono di determinare per quale valore dei carichi e/o dei cedimenti delle imposte avverrà il collasso dell'arco.

[Si osservi che in questa trattazione, se non diversamente specificato, 'stabilità' deve essere intesa nel senso della Meccanica Razionale (configurazione di equilibrio distinta dai meccanismi di collasso) (e non come fenomeno elastico o elastoplastico legato alla configurazione deformata della struttura, studiato nell'ambito della Scienza delle Costruzioni)].

Nel secondo caso, trattandosi di una verifica di resistenza, vengono usati tutti quei procedimenti che permettono, noti i carichi agenti, la geometria e le leggi di comportamento dei materiali che costituiscono la struttura, di determinarne lo stato di tensione in ciascun punto verificandone l'ammissibilità con le proprietà del materiale usato. Ai due differenti obiettivi sottostanno, ovviamente, schematizzazioni e modelli di calcolo fondamentalmente diversi.

Infatti, qualora si voglia procedere alla determinazione dello stato di sollecitazione in una struttura ad arco (schematizzazione (2)), non si può prescindere dalla deformabilità del materiale o dei materiali che la costituiscono.

Tuttavia, la grande differenza tra i valori dei parametri meccanici che rappresentano la deformabilità della pietra e della malta rende accettabile l'ipotesi di conci indeformabili permettendo così di schematizzare la struttura con un insieme di elementi rigidi collegati da vincoli deformabili e fessuranti tali da simulare il comportamento effettivo del giunto di malta.

Questa schematizzazione risulta sufficientemente aderente all'effettivo comportamento di un arco in muratura, di pietra o mattoni e malta di calce, materiali di cui peraltro risulta costituita la maggior parte delle costruzioni dell'edilizia storica.

Se invece interessa conoscere il carico o il cedimento limite (schematizzazione (1)), si deve osservare che, nella ricerca dello stato ultimo, le proprietà del materiale che ne descrivono gli aspetti deformativi non intervengono: è quindi sufficiente fare riferimento ad uno schema costituito da conci rigidi con interfacce fessuranti.

Come rilevato da J. Heyman, un tale modello, costituito da blocchi rigidi geometricamente definiti e dotati di peso, sebbene già adottato nelle prime teorie statiche sugli archi che risalgono al XVIII secolo, appare ancora oggi sufficientemente espressivo e pertanto ancora idoneo alla analisi di archi in muratura.

Le teorie, inizialmente formulate alla fine del XVII secolo - rivolte soprattutto alla individuazione dei meccanismi di collasso, gli unici, d'altronde, suscettibili di verifica sperimentale - e quelle successivamente sviluppate per la ricerca della 'curva di pressione' e della migliore forma da attribuire ad un arco, contenevano già gli elementi essenziali alla descrizione del comportamento degli archi in muratura.

Nel presente lavoro, numericamente tradotto dal software SAV, la stabilità dell'arco (di forma generica e genericamente caricato da forze concentrate e/o distribuite verticali e/o orizzontali) viene studiata secondo la schematizzazione (1): l'arco è visto come struttura costituita da conci rigidi (gli "elementi finiti") che si trasmettono sollecitazioni attraverso l'interfaccia (eventualmente costituita da malta) che diviene la sede delle fessurazioni; il collasso della struttura avviene per formazione di un meccanismo di tipo rigido determinato dall'apertura di quattro cerniere poste alternativamente sulla curva di intradosso ed estradosso dell'arco in modo da garantire una configurazione cinematicamente compatibile.

Il modello numerico proposto fornisce, quindi, la risposta alla seguente domanda:

“Dato un arco di geometria assegnata, esiste un poligono funicolare compatibile con i carichi applicati che risulti ovunque contenuto all'interno della sagoma dell'arco o al più tangente alle curve di intradosso o di estradosso dell'arco stesso ? ”

In caso di risposta affermativa, la verifica di stabilità risulta soddisfatta. In particolare, in modello numerico fornisce, come risultato, l'effettivo poligono limite compatibile con il sistema di carichi applicati.

Sarà possibile inoltre definire una sorta di “coefficiente di sicurezza”, legato intrinsecamente alla geometria dell'arco, al quale, usando la definizione proposta da J. Heyman, può essere dato il nome di “fattore geometrico di sicurezza”. Occorre notare, intatti, che l'assunzione che un arco sia stabile o sicuro quando contenga al suo interno un poligono funicolare compatibile con i carichi, non indica quanto l'arco stesso sia effettivamente stabile o sicuro. In tal senso le parole “stabile” o “sicuro” non hanno un valore numerico! Per ricavare una quantità numerica che definisca il grado di sicurezza sarà possibile definire l'arco di minimo spessore compatibile con il poligono funicolare relativo al sistema dei carichi. Attraverso il rapporto tra lo spessore dell'arco reale e quest'ultimo sarà possibile determinare il “coefficiente di sicurezza”. A tale proposito occorre notare che la regola grafica basata sul fattore geometrico di sicurezza uguale a 3, equivalente in pratica alla regola del terzo medio e caratterizzante il noto metodo di Mery, è del tutto arbitraria: tale valore in generale può essere del tutto diverso, a volte anche minore.

La soluzione limite ottenuta attraverso la risoluzione numerica, sebbene caratterizzata da un poligono funicolare non necessariamente coincidente con quello effettivo (per ottenere tale risultato occorre ragionare secondo la schematizzazione (2)), può considerarsi del tutto sufficiente per accertare la stabilità della struttura e per fornire valori di calcolo relativi alle azioni mutue fra i conci, oltre che per definire le azioni esercitate sulle imposte (per eventuali successive verifiche sui piedritti).

Il metodo rende inoltre possibile la determinazione del moltiplicatore di collasso dei carichi: ciò consentirà, ad esempio nel caso di forze orizzontali di origine sismica, la definizione della massima intensità sismica sostenibile dalla struttura prima del collasso, in pieno accordo con l'orientamento della vigente Normativa antisismica.

L'esposizione teorica della metodologia di calcolo degli archi sarà preceduta da un inquadramento generale dell'analisi del comportamento statico delle strutture in muratura attraverso una sintesi dei lavori di J. Heyman.

L'Autore dei tre volumi del Manuale di SAV 2012 è l'Ing. Francesco Pugi per la AEDES Software; il testo (prima edizione: 2000) è stato revisionato in occasione del rilascio della versione 2012, alla luce dei più recenti sviluppi del settore con particolare riferimento alla nuova Normativa tecnica e alle analisi di vulnerabilità sismiche. Il codice di calcolo (vers. 2000 e successivi aggiornamenti), l'impostazione teorico-applicativa relativa alle analisi per moltiplicatori di collasso (verticali e orizzontali), alle azioni sismiche e all'applicazione delle Normative tecniche di nuova generazione, sono stati integralmente scritti e curati da Francesco Pugi, unico Autore anche della documentazione associata.

Per la realizzazione del Manuale, il capitolo 2. è ampiamente ripreso da [1].

Gli Autori della metodologia di calcolo illustrata al capitolo 3. sono il Prof. Arch. Michele Paradiso, il Prof. Arch. Giacomo Tempesta e il Prof. Arch. Silvia Briccoli Bati ([5], [6]).

La trattazione completa della Teoria, insieme ad un'illustrazione sintetica delle funzioni operative dei software SAV-SVM, viene svolta nell'opera editoriale:

M.Paradiso, G.Tempesta, S.Galassi, F.Pugi, “Sistemi Voltati in Muratura”, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma, 2007.

Per il paragrafo 3.3.2.4., per la definizione delle cerniere di apertura e per un corretto inquadramento del metodo del Méry nei confronti dell'analisi limite, si è fatto riferimento a [7].

Per i metodi numerici (inversa generalizzata) si può fare riferimento ai cenni riportati in [8].

Per il capitolo 3.4. si è fatto riferimento a [9].

1.1. NORMATIVA DI RIFERIMENTO

D.M. 14.1.2008: "Approvazione delle nuove norme tecniche per le costruzioni", Supplemento ordinario alla "Gazzetta Ufficiale", n.29 del 4 febbraio 2008.

Circolare 2.2.2009, n.617: "Istruzioni per l'applicazione delle "Nuove norme tecniche per le costruzioni" di cui al D.M. 14.1.2008.

Edifici monumentali: Circ. 26 del 2.12.2010 del Ministero per i Beni e le Attività Culturali: "Linee guida per la valutazione e riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale con riferimento alle norme tecniche per le costruzioni di cui al D.M. 14.1.2008". Le Linee Guida sono parte integrante della **Direttiva P.C.M. del 9.2.2011:** "Valutazione e riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale con riferimento alle Norme tecniche per le costruzioni di cui al decreto del Ministero delle infrastrutture e dei trasporti del 14 gennaio 2008".

Linee guida per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture di c.a., c.a.p. e murarie mediante FRP, documento approvato il 24 luglio 2009 dall'assemblea Generale del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici.

Indirizzi per l'esecuzione degli interventi di cui all'Ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri n.3790 del 17.7.2009 (Riparazione con miglioramento sismico di edifici danneggiati), a cura della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Dipartimento della Protezione Civile, Commissario Delegato (Eventi sismici provincia di L'Aquila, 6 aprile 2009).

Riferimenti tecnici: EuroCodici

Per quanto non diversamente specificato nel D.M.14.1.2008, si intendono coerenti con i principi alla base del Decreto le indicazioni riportate nei documenti di riferimento elencati in §12; fra questi: gli EuroCodici strutturali, così organizzati:

Criteri generali di progettazione strutturale

UNI EN 1990:2006

Eurocodice 1 – Azioni sulle strutture

UNI EN 1991-1-1:2004 Parte 1-1: Azioni in generale - Pesi per unità di volume, pesi propri e sovraccarichi per gli edifici

UNI EN 1991-1-2:2004 Parte 1-2: Azioni in generale - Azioni sulle strutture esposte al fuoco

UNI EN 1991-1-3:2004 Parte 1-3: Azioni in generale - Carichi da neve

UNI EN 1991-1-4:2005 Parte 1-4: Azioni in generale - Azioni del vento

UNI EN 1991-1-5:2004 Parte 1-5: Azioni in generale - Azioni termiche

UNI EN 1991-1-6:2005 Parte 1-6: Azioni in generale - Azioni durante la costruzione

UNI EN 1991-1-7:2006 Parte 1-7: Azioni in generale - Azioni eccezionali

UNI EN 1991-2:2005 Parte 2: Carichi da traffico sui ponti

UNI EN 1991-3:2006 Parte 3: Azioni indotte da gru e da macchinari

UNI EN 1991-4:2006 Parte 4: Azioni su silos e serbatoi

Eurocodice 2 – Progettazione delle strutture in calcestruzzo

UNI EN 1992-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

UNI EN 1992-1-2:2005 Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1992-2:2006 Parte 2: Ponti di calcestruzzo - Progettazione e dettagli costruttivi

UNI EN 1992-3:2006 Parte 3: Strutture di contenimento liquidi

Eurocodice 3 – Progettazione delle strutture in acciaio

UNI EN 1993-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

UNI EN 1993-1-2:2005 Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1993-1-3:2007 Parte 1-3: Regole generali - Regole supplementari per l'impiego dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo

UNI EN 1993-1-4:2007 Parte 1-4: Regole generali - Regole supplementari per acciai inossidabili

UNI EN 1993-1-5:2007 Parte 1-5: Elementi strutturali a lastra

UNI EN 1993-1-6:2007 Parte 1-6: Resistenza e stabilità delle strutture a guscio

UNI EN 1993-1-7:2007 Parte 1-7: Strutture a lastra ortotropa caricate al di fuori del piano

UNI EN 1993-1-8:2005 Parte 1-8: Progettazione dei collegamenti

UNI EN 1993-1-9:2005 Parte 1-9: Fatica

UNI EN 1993-1-10:2005 Parte 1-10: Resilienza del materiale e proprietà attraverso lo spessore

UNI EN 1993-1-11:2007 Parte 1-11: Progettazione di strutture con elementi tesi

UNI EN 1993-1-12:2007 Parte 1-12: Regole aggiuntive per l'estensione della EN 1993 fino agli acciai di grado S 700

UNI EN 1993-2:2007 Parte 2: Ponti di acciaio

UNI EN 1993-3-1:2007 Parte 3-1: Torri, pali e ciminiere - Torri e pali

UNI EN 1993-3-2:2007 Parte 3-2: Torri, pali e ciminiere - Ciminiere

UNI EN 1993-4-1:2007 Parte 4-1: Silos

UNI EN 1993-4-2:2007 Parte 4-2: Serbatoi

UNI EN 1993-4-3:2007 Parte 4-3: Condotte

UNI EN 1993-5:2007 Parte 5: Pali e palancole

UNI EN 1993-6:2007 Parte 6: Strutture per apparecchi di sollevamento

Eurocodice 4 – Progettazione delle strutture composte acciaio-calcestruzzo

UNI EN 1994-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

UNI EN 1994-1-2:2005 Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1994-2:2006 Parte 2: Regole generali e regole per i ponti

Eurocodice 5 – Progettazione delle strutture in legno

UNI EN 1995-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali - Regole comuni e regole per gli edifici

UNI EN 1995-1-2:2005 Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1995-2:2005 Parte 2: Ponti

Eurocodice 6 – Progettazione delle strutture in muratura

UNI EN 1996-1-1:2006 Parte 1-1: Regole generali per strutture di muratura armata e non armata

UNI EN 1996-1-2:2005 Parte 1-2: Regole generali - Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1996-2:2006 Parte 2: Considerazioni progettuali, selezione dei materiali ed esecuzione delle murature

UNI EN 1996-3:2006 Parte 3: Metodi di calcolo semplificato per strutture di muratura non armata

Eurocodice 7 – Progettazione geotecnica

UNI EN 1997-1:2005 Parte 1: Regole generali

UNI EN 1997-2:2007 Parte 2: Indagini e prove nel sottosuolo

Eurocodice 8 – Progettazione delle strutture per la resistenza sismica

UNI EN 1998-1:2005 Parte 1: Regole generali, azioni sismiche e regole per gli edifici

UNI EN 1998-2:2006 Parte 2: Ponti

UNI EN 1998-3:2005 Parte 3: Valutazione e adeguamento degli edifici

UNI EN 1998-4:2006 Parte 4: Silos, serbatoi e condotte

UNI EN 1998-5:2005 Parte 5: Fondazioni, strutture di contenimento ed aspetti geotecnici

UNI EN 1998-6:2005 Parte 6: Torri, pali e camini

Eurocodice 9 – Progettazione delle strutture in alluminio

UNI EN 1999-1-1:2007 Parte 1-1: Regole strutturali generali

UNI EN 1999-1-2:2007 Parte 1-2: Progettazione strutturale contro l'incendio

UNI EN 1999-1-3:2007 Parte 1-3: Strutture sottoposte a fatica

UNI EN 1999-1-4:2007 Parte 1-4: Lamiere sottili piegate a freddo

UNI EN 1999-1-5:2007 Parte 1-5: Strutture a guscio

Norme Italiane precedenti al D.M. 14.1.2008:

Le norme elencate nel seguito sono in generale da considerarsi superate dal D.M.14.1.2008; esse possono costituire tuttavia utili fonti di riferimento per la comprensione dello sviluppo dei metodi di calcolo adottati dalle NTC.

D.M. 14.9.2005: "Norme Tecniche per le Costruzioni" (ex Testo Unico)

In campo antisismico, il D.M. 14.9.2005 definisce l'azione sismica [§3.2] e fissa i livelli di sicurezza. Nel rispetto di tali presupposti, il D.M.14.9.2005 può fare riferimento all'OPCM 3274 e s.m.i. [§5.7.1.1] per le indicazioni attuative sulle verifiche di sicurezza.

Sismica: Ordinanza P.C.M. n. 3274 del 20.3.2003: "Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica", e successive modifiche e integrazioni:

Ordinanza P.C.M. n. 3316 del 2.10.2003 e Ordinanza P.C.M. n. 3431 del 3.5.2005

Sismica: D. P.C.M. del 21.10.2003: "Disposizioni attuative dell'art.2, commi 2, 3 e 4, dell'Ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri n.3274 del 20 marzo 2003".

Norme strutturali precedenti all'OPCM 3274 (per la Sismica) e al D.M. 14.9.2005:

Legge n.64 del 2.2.1974: "Provvedimenti per le costruzioni, con particolari prescrizioni per le zone sismiche."

Regione Autonoma Friuli Venezia Giulia - Legge Regionale n. 30 del 20.6.1977: "Documentazione tecnica per la progettazione e direzione delle opere di riparazione degli edifici - Documento Tecnico n. 2 - Raccomandazioni per la riparazione strutturale degli edifici in muratura."

Regione Umbria, Art.38 L.R. 1.7.1981, n.34: "Direttive tecniche ed esemplificazioni delle metodologie di

intervento per la riparazione ed il consolidamento degli edifici danneggiati da eventi sismici.”

D.M. 2.7.1981: “Normativa per le riparazioni ed il rafforzamento degli edifici danneggiati dal sisma nelle regioni Basilicata, Campania e Puglia.”

Circolare Min.LL.PP. n.21745 del 30.7.1981: “Istruzioni relative alla normativa tecnica per la riparazione ed il rafforzamento degli edifici in muratura danneggiati dal sisma.”

D.M. 16.1.1996: “Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche.”

Circolare Min.LL.PP. n.65 del 10.4.1997: “Istruzioni per l’applicazione delle “Norme Tecniche per le costruzioni in zone sismiche” di cui al D.M. 16.1.1996.”

Servizio Sismico Nazionale (S.S.N.) - Associazione Nazionale Italiana di Ingegneria Sismica

(A.N.I.D.I.S.): “Commentario al D.M. 16.1.1996 ed alla Circ. n.65 del 10.4.1997 del Ministero LL.PP.”, coord. F.Braga, 1998

D.G.R. Umbria n.5180 del 14.9.1998 e D.G.R. Marche n.2153 del 14.9.1998 in attuazione Legge 61/98:

“Eventi sismici del 12 maggio, 26 settembre 1997 e successivi - Modalità e procedure per la concessione dei contributi previsti dall’art.4 della Legge 61/98 - Allegato B”.

Provincia di Perugia, Servizio Sismico Nazionale: “Terremoto in Umbria e Marche del 1997. Criteri di calcolo per la progettazione degli interventi. Verifiche sismiche ed esempi per l’applicazione delle Direttive Tecniche D.G.R. Umbria 5180/98 e D.G.R. Marche 2153/98 in attuazione L.61/98”, coord. De Sortis, G.Di Pasquale, U.Nasini, 1998.

Murature: D.M. 20.11.1987: “Norme tecniche per la progettazione, esecuzione e collaudo degli edifici in muratura e per il loro consolidamento.”

Circolare Min.LL.PP. n.30787 del 4.1.1989: “Istruzioni in merito alle norme tecniche per la progettazione, esecuzione e collaudo degli edifici in muratura e per il loro consolidamento.”

Carichi: D.M. 16.1.1996: “Norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi.”

1.2. BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

M.Paradiso, G.Tempesta, S.Galassi, F.Pugi, "Sistemi Voltati in Muratura", DEI Tipografia del Genio Civile, Roma, 2007.

In questo Manuale viene fatto riferimento anche ai seguenti contributi:

- [1] **J. Heyman, "Appunti dalle lezioni sul calcolo delle ossature murarie"**, a cura di C.Alessandri, S.Briccoli Bati, G. Tempesta, U.Tonietti, Lezioni integrative dei corsi di statica e scienza delle costruzioni, giugno 1984, pubblicazione n. 30/1984 del Dipartimento di Costruzioni dell'Università degli Studi di Firenze, Facoltà di Architettura.
- [2] **L. Benouville, "Etude sur la Cathédrale du Beauvais"**, Encyclopedie de Architecture, serie 4, Paris 1891-92, IV, 52-54, 60-62, 68-70.
- [3] **P. Sejouré, "Grandes voutes"**, 6 volumes, Bourges, 1913-16.
- [4] **J. Heyman, "The masonry arch"**, Ellis Sorwood, Chichester, 1982.
- [5] **S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta, "Sul calcolo degli archi in muratura"**, pubblicazione n. 1/89 del Dipartimento di Costruzioni dell'Università degli Studi di Firenze, Facoltà di Architettura.
- [6] **S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta, "Archi in muratura soggetti a carichi e cedimenti delle imposte"**, in: Riv. Costruire in Laterizio, pp.436-443, n.60/97.
- [7] **V. Franciosi, "Verifica sismica delle grosse opere in muratura"**, in: Atti del Convegno di Ingegneria antisismica e protezione civile, Comune di Ragusa, 7-20 ottobre 1981.
- [8] **F. Fontanella, Pasquali, "Calcolo Numerico, Metodi e Algoritmi"**, Vol. 1, Pitagora Editrice, Bologna.
- [9] **S. Di Pasquale, C. Messina, L. Paolini, B. Furiozzi, "Corso di Costruzioni: Vol. 3, Tecniche dei Sistemi Strutturali"**, Le Monnier, Firenze, 1995.
- [10] **B. Furiozzi, C. Messina, L. Paolini, "Prontuario per il Calcolo di Elementi Strutturali"**, Le Monnier, Firenze, 1998.
- [11] **ERTAG, "Tecnica e pratica del recupero edilizio"**, Alinea Editrice, Firenze, 1994.
- [12] **C. Modena, M. Valdemarca, M.R.Valluzzi, "Volte murarie rinforzate mediante FRP: Analisi sperimentale e modellazione del comportamento"**, Riv. L'Edilizia, n.5/6-1999 (pp. 26-32) e 7/8-1999 (pp. 42-49).
- [13] **L. Jurina, "L'Arco armato nel consolidamento di archi e volte in muratura"**, Riv. Recupero e Conservazione, De Lettera Editore, Milano, aprile-maggio 2000, pp. 54-61.
- [14] **P. Faccio, P. Foraboschi, "Volte a botte ed archi"**, Riv. L'Edilizia, Milano, aprile-maggio 2000, pp. 48-56.
- [15] **C. Guidi, "Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni"**, Parte Terza, V.Bona, Torino, 1934.
- [16] **J. M. Delbecq, "Les ponts en maçonnerie"**, Ministère des Transports, SETRA, Paris, 1982.
- [17] **Regione dell'Umbria, "Manuale per la riabilitazione e la ricostruzione postsismica degli edifici"**, a cura di F.Gurrieri, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma, 1999.
- [18] **F. Clementi, S. Lenci, "I compositi nell'Ingegneria Strutturale"**, Società Editrice Esculapio, Bologna, 2009.

Importanti memorie relative all'argomento sono inoltre le seguenti:

- S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta, " Analysis of masonry structures modelled by a set of rigid blocks and unilateral contact constraints "**, Fourth International Symposium on Structural Masonry, STRUMAS, Firenze, 1997.
- S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta, "Failure analysis of masonry structures subjected to in-plane actions and external settlements"**, 4th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Metz, France, 2000.
- M. Paradiso, G. Tempesta, "A numerical model for seismic strengthening evaluation of masonry arches with carbon fibres"**, 5th International Congress on Restoration of Architectural, Heritage 2000, Firenze, Italy, 2000.
- S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta, "Analysis of masonry structures modelled on rigid blocks and unilateral elastic contact constraints"**, Fifth International Conference on Computational Structures Technology, Leuven, Belgium, 2000.

2. COMPORTAMENTO STATICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA

2.1. GENERALITA'

0. Le strutture in muratura hanno da sempre dimostrato una considerevole durata nel tempo. Esse rispondono alle azioni di disturbo, quali piccoli cedimenti del terreno di fondazione, eventi sismici, forti pressioni esercitate dal vento o da esplosioni, con lo sviluppo di fessurazioni, scarsamente significative dal punto di vista strutturale, ma tali da modificare l'intero schema reagente. La risorsa ultima ed inattaccabile delle strutture in muratura consiste nella capacità, che esse mostrano, di trasformarsi da strutture altamente iperstatiche in strutture staticamente determinate. Anche nella configurazione variata la struttura continua ad assolvere la sua originaria funzione e allo stesso tempo è in grado di reagire ad ulteriori azioni esterne senza altri cambiamenti nelle proprie condizioni.

1. La caratteristica peculiare degli edifici greci, romani, bizantini, romanici e gotici sta nel fatto che alcuni di essi continuano tuttora ad esistere. Piccole lesioni sono comparse naturalmente e talvolta grandi catastrofi si sono verificate, ma nel complesso, tali strutture sono da considerarsi estremamente stabili. Santa Sofia, in Costantinopoli, subì nei primissimi anni dopo la sua costruzione due violenti terremoti; la conseguenza straordinaria non fu che ad ogni occasione un quarto dell'alta cupola cadesse, ma che viceversa i tre quarti della stessa rimanessero in piedi (ogni volta fu restaurata per intero); similmente i bombardamenti della seconda guerra mondiale (è il caso di Cologne) danneggiarono solo lieve mente le cattedrali medioevali, attorniate da moderne città totalmente distrutte.

2. Con riferimento a bassi livelli di disturbo, sembra che i progressivi cedimenti e assestamenti delle fondazioni, verificatisi in molti edifici, non abbiano provocato dissesti allarmanti nella struttura muraria (benché, come si può vedere, ci sia un periodo iniziale di elevato rischio equivalente a circa una generazione). E' vero che le murature possono apparire sfigurate da lesioni di piccola o grande estensione; tali lesioni comunque, possono continuare ad esistere per secoli, e non sono i segni di un eventuale imminente collasso. Piuttosto, le lesioni sono l'indicazione del modo con cui le strutture in muratura si sono adattate al loro ambiente. **L'essere fratturate è uno stato naturale per le murature.**

3. Nello stesso tempo è sia conveniente quanto prudente considerare un edificio in muratura come un assemblaggio di pietre a secco, alcune squadrate altre no, poste una sull'altra in modo tale da fornire una struttura stabile. La malta può essere usata per riempire gli interstizi; tuttavia essa può essere debole fin dall'inizio o può subire un degrado progressivo con il tempo e pertanto il suo contributo può essere trascurato ai fini della resistenza della costruzione. La stabilità dell'insieme è assicurata infatti dalla compattezza sotto il peso dei vari elementi; possiamo avere uno stato generale di compressione ma solamente una minima trazione può essere sopportata.

4. In particolare la forma della costruzione, sia che si tratti di un semplice arco come di una cattedrale gotica, sarà mantenuta attraverso il collegamento interfacciale degli elementi. In casi di pietre con superfici squadrate, assemblate a secco, le forze d'attrito, se c'è una tendenza allo scivolamento all'interno della fabbrica, devono agire sulle facce di collegamento. Inoltre gli sforzi interni di compressione, dovuti al peso proprio, possono essere pensati come uno stato particolare di precompressione della muratura, tale da garantire la stabilità globale e permettere alle forze non agenti verticalmente di trasmettersi, all'interno della muratura, senza produrre trazioni o scorrimenti.

5. L'entità degli sforzi di compressione, dovuti al peso proprio del materiale, può essere determinata facilmente. Infatti la tensione di compressione per effetto del peso proprio, alla base di una parete piana di spessore uniforme, è semplicemente γh , dove γ è il peso specifico del materiale e h l'altezza della parete. E' interessante confrontare tale tensione con quella di rottura a compressione della pietra. In modo approssimato la tensione di rottura per schiacciamento di una pietra di media resistenza risulta essere di 40000 kN/m^2 ($40 \text{ N/mm}^2 = 40 \text{ MPa} = 400 \text{ kg/cm}^2$), mentre il peso specifico è in genere pari a 20 kN/mc ($20000 \text{ N/mc} = 2000 \text{ kg/mc} = 0.002 \text{ kg/cm}^3$). Il che significa che la rottura per schiacciamento alla base di una parete monolitica può verificarsi solo per un valore di h pari a: $400 / 0.002 = 200000 \text{ cm} = 2000 \text{ m}$.

6. Anche se si dovessero eliminare alla base i tre quarti della parete per l'inserimento di finestre, arcate o aperture del genere, il rimanente quarto di muratura solida potrebbe ancora sopportare il peso corrispondente ad una parete alta 500 m , un'altezza indubbiamente superiore a quelle generalmente riscontrabili nelle costruzioni murarie. Questi dati denotano l'esistenza di un fattore di sicurezza molto alto in calcoli condotti in riferimento alla tensione di rottura per schiacciamento della pietra.

7. Infatti, gli elementi più sollecitati in un edificio antico in muratura, come, ad esempio, le pietre alla base di una torre di una cattedrale gotica, presentano tensioni medie pari a $1/10$ della resistenza a schiacciamento del

materiale e la struttura principale resistente risulta lavorare a meno di 1/100 della resistenza allo schiacciamento; pareti ad elementi strutturali secondari presentano invece tensioni pari a 1/1000 quella di rottura. Benouville [2], analizzando la cattedrale di Beauvais, era stupito dal fatto di non trovare tensioni di calcolo maggiori di 13 kg/cm² (1.3 N/mm²).

8. Studi di tal genere su archi in muratura conducono a risultati analoghi. Per esempio in un ponte medioevale di luce relativamente piccola, gli archi sono sollecitati soltanto debolmente e perfino "i grandi archi" del tardo '800 e del '900 [3] sono anch'essi sollecitati per non più 1/10 della resistenza della pietra.

9. Ancora, le sollecitazioni in una copertura soggetta soltanto al peso proprio sono dell'ordine di $R\gamma$, dove R è il raggio locale di curvatura e γ il peso specifico (R avrà due valori in una volta a doppia curvatura). Così per una volta di navata avente $R = 15$ m, può risultare $R\gamma = 1500 \times 0.002 = 3$ kg/cm² = 0.3 N/mm².

10. Tali calcoli ci forniscono soltanto degli ordini di grandezza, comunque possono essere già tratte alcune conclusioni significative. La prima, derivante dall'osservazione che strutture in pietra, per quanto antiche, continuano tuttora ad esistere, è che, apparentemente, anche una piccolissima precompressione è sufficiente ad evitare il pericolo di scorrimenti e di generale perdita di compattezza della muratura. Tale osservazione acquista importanza se allo strutturista è richiesto il restauro o il consolidamento di una struttura in muratura; essa fornisce infatti un riferimento teorico da tener presente, ad esempio, nel calibrare la pretensione degli appositi cavi.

11. Un'altra conclusione ben più importante può essere comunque tratta. Se il livello di sforzo della muratura si mantiene mediamente basso, tutte le considerazioni teoriche ad essa relative possono rientrare nella più ampia teoria del calcolo a rottura [4]. Le caratteristiche che il materiale viene allora ad assumere sono le seguenti:

- a) **non si verifica collasso per scorrimento**, essendo ogni possibile tendenza a tale fenomeno impedita da forze di attrito sufficientemente alte tra le varie parti della struttura;
- b) **la muratura non ha resistenza a trazione** (cioè le connessioni sono a secco o realizzate con malta di resistenza a trazione trascurabile);
- c) **la muratura ha una resistenza a compressione infinita**, il che implica che le sollecitazioni risultano, per confronto, talmente basse che non c'è pericolo di rottura per schiacciamento del materiale.

12. Naturalmente lo scorrimento può talvolta verificarsi in una struttura in muratura. Però l'ipotesi b), secondo cui è trascurata ogni resistenza a trazione interna, è chiaramente a vantaggio della sicurezza. E' possibile poi apportare leggere modifiche ai calcoli al fine di eliminare eventuali conseguenze dell'ipotesi c), controproducenti ai fini della sicurezza; ma, nella pratica corrente tali modifiche non sono, in genere, indispensabili.

13. Inoltre si dovranno assumere le consuete ipotesi della teoria elastica o plastica delle strutture. In particolare è necessaria l'ipotesi dei piccoli spostamenti per l'approccio di tipo plastico ed infine che non esistano nella struttura parti di snellezza tale (colonne o pareti sottili) da provocare fenomeni d'instabilità (nel senso euleriano).

14. I teoremi fondamentali della plasticità possono essere così "traslati" alle murature; di questi è importantissimo il "**teorema statico**". In poche parole, questo teorema stabilisce che **se è possibile trovare un qualsiasi sistema di sollecitazioni interne in equilibrio con il carico esterno e tale che in nessuna sezione sia superata la resistenza alla schiacciamento, allora la struttura nel suo complesso è stabile**.

15. L'analisi strutturale delle murature viene così a differenziarsi notevolmente dalla teoria elastica convenzionale. In particolare non viene richiesto il calcolo di incognite "sovrabbondanti" attraverso le equazioni di compatibilità; ad esempio, non è necessario definire le esatte condizioni alla fondazione per determinare i valori di spostamento che saranno adoperati successivamente. Lo strutturista non cerca di definire lo "stato effettivo" della struttura. Al contrario, tutto ciò che ha bisogno di esaminare è un solo stato di equilibrio, favorevole nei confronti della stabilità (per esempio quello in cui le tensioni sono assunte essere uniformemente distribuite nella muratura piuttosto che basse in alcune parti ed elevate in altre).

2.2. L'ARCO IN MURATURA

16. Esaminiamo, come esempio, l'arco in muratura. In questo caso, lo stato di sollecitazione dell'arco è definito dalla posizione della linea delle pressioni; ciò che lo strutturista ha bisogno di conoscere è la forma e la posizione del poligono funicolare. (L'analogia tra la forma che una fune vincolata all'estremità assume sotto carico e la corrispondente linea delle pressioni è nota da 300 anni. Lo stesso poligono funicolare, in trazione per la fune e in compressione per l'arco, rappresenta uno stato d'equilibrio con il carico applicato).

17. Le condizioni d'equilibrio forniscono da sole la forma del poligono funicolare, ma non sono in grado di definirne la posizione. Il teorema statico assicura comunque che, **se è possibile definire un qualunque poligono**

funicolare (ossia una curva delle pressioni) all'interno dello spessore dell'arco, questo è stabile. Per dimostrare che l'arco può assolvere le sue funzioni statiche è necessario soltanto mostrare che esiste almeno un sistema di forze interne compatibile (equilibrio con le forze esterne, assenza di trazioni, tensioni inferiori a quelle di rottura). Assegnando all'arco in muratura attributi quasi umani, si potrebbe dire che esso cerca di trovare da solo, al suo interno, un sistema di forze compatibile.

18. Al contrario, se si ricerca "l'effettivo" sistema di forze, allora un approccio di tipo tradizionale richiederà certe ipotesi preliminari, come ad esempio sulle "imposte" che, sotto carico, potranno rimanere fisse o cedere secondo ben specificate regole. Con alcune ipotesi di questo tipo, esattamente definite, è possibile compiere un'analisi elastica della struttura (o anelastica, se si vuol tener conto di certe complicazioni derivanti dalle reali caratteristiche del materiale: insieme di pietre, malta, vuoti); si ricaverà in tal modo un sistema di forze compatibile con le ipotesi assunte e certamente in equilibrio con i carichi applicati.

19. Tale sistema di forze non può, comunque, essere considerato l'effettivo sistema di forze agente sulla struttura. Infatti, se non per altre cause, la validità delle ipotesi formulate risulta inevitabilmente inficiata dal trascorrere del tempo: una spalla di un ponte ad arco come pure i pilastri di una cattedrale possono cedere leggermente. Piccoli movimenti di questa natura possono alterare notevolmente lo stato di equilibrio della struttura; comunque, non sembra ragionevole supporre che un assestamento di pochi millimetri nel raggio di pochi metri, anche se ha evidentemente una notevole risonanza sulla posizione della linea delle pressioni all'interno dell'arco, possa realmente produrre effetti apprezzabili sulla sua resistenza.

20. Il teorema statico giustifica appunto questa considerazione dettata dal buon senso. Piccole deformazioni dell'arco, non direttamente apprezzabili, possono causare lo spostamento brusco della linea delle pressioni all'interno della muratura; il teorema statico afferma però che, una volta dimostrata l'esistenza anche di una sola linea delle pressioni tutta contenuta all'interno della muratura, non c'è più alcun problema sul modo in cui la linea delle pressioni può spostarsi in risposta ai cambiamenti delle condizioni esterne: essa non uscirà mai dalla muratura.

21. E' soprattutto un problema di geometria. Un difetto di qualche millimetro rapportato ad alcuni metri è equivalente all'unità nei confronti delle migliaia; è cioè dello stesso ordine dell'imperfezione dello spessore di un tratto di matita nel disegno di un arco. Sul piano grafico, l'arco perfetto e quello non perfettamente disegnato appaiono identici. Quindi un poligono funicolare tracciato e verificato per un arco perfetto andrà bene anche per lo stesso arco con qualche imperfezione.

22. Pertanto difetti di questo tipo non inficiano assolutamente la stabilità dell'arco. Piuttosto, la sua "sicurezza" o "affidabilità" deve essere determinata anche geometricamente. Se, per esempio, il poligono funicolare potesse essere racchiuso all'interno di un arco dello stesso profilo di quello in esame, ma avente uno spessore pari ad un terzo di questo, allora il "coefficiente geometrico di sicurezza" sarebbe 3. Questo è il vero significato della "regola del terzo medio"; tale coefficiente dà una valutazione quantitativa della possibilità che la linea delle pressioni ha di variare all'interno dell'arco.

23. Si supponga che un arco in muratura sia stato costruito a regola d'arte in modo tale da adattarsi esattamente nello spazio compreso fra un'imposta e l'altra. Una volta tolta la centina, l'arco spingerà contro le imposte; se queste cedono, esso si adatterà ad una luce maggiore di quella iniziale dando luogo alla formazione di cerniere (fig. 2.2.1(a)). La corrispondente linea delle pressioni risulta così definita univocamente (fig. 2.2.1(b)). Sono sufficienti tre cerniere per trasformare l'arco iperstatico in una struttura staticamente determinata.

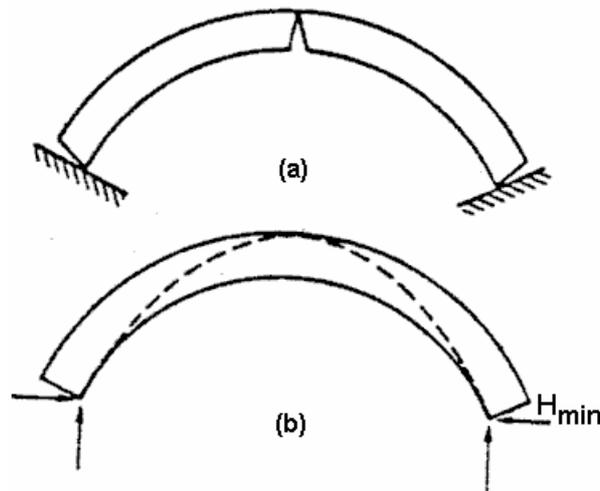


Fig. 2.2.1.

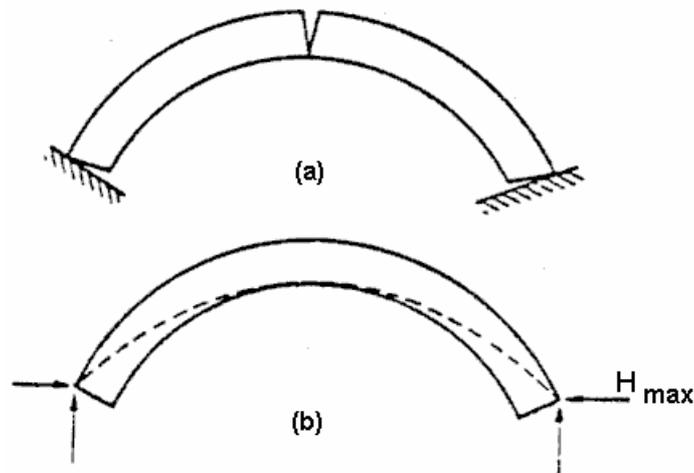


Fig. 2.2.2.

24. La spinta alle reni di fig. 2.2.1(b) ha un valore minimo; il valore massimo corrisponde invece alla configurazione di fig. 2.2.2. In questo caso le sezioni d'imposta tendono a chiudersi (cioè ad avvicinarsi) e le tre cerniere sono disposte secondo uno schema che permette all'arco di adattarsi alla nuova luce ridotta.

25. Le figure 2.2.1(b) e 2.2.2(b) rappresentano le due posizioni estreme della linea delle pressioni. Si suppone che i movimenti che portano alla formazione delle cerniere siano piccoli, essi però possono ugualmente indurre la linea delle pressioni ad assumere delle posizioni limite ampiamente diverse. Comunque, per ciascuna delle due posizioni limite è possibile calcolare il corrispondente valore della pressione alle reni, e questi sono infatti i limiti entro cui deve essere compreso un qualsiasi valore reale di tale pressione. Pertanto, nonostante non sia possibile precisare le esatte condizioni di vincolo dell'arco è almeno possibile ottenere i limiti numerici entro cui può variare la sollecitazione, in una generica sezione; il teorema statico non è quindi uno strumento così grossolano come potrebbe apparire.

26. Questo esempio, molto semplice, relativo all'arco, è sufficiente ad illustrare il modo in cui si formano le fratture in strutture anche più complesse. La semplice presenza di tali fratture non è di per sé allarmante, ammesso che i movimenti che le hanno causate non continuino nel tempo e le variazioni dell'intera geometria non siano eccessive. Un assestamento progressivo delle strutture in muratura, indotto da variazioni termiche o da azioni ripetute dovute al vento, può continuare a verificarsi nei secoli. Cambiamenti di stato più rapidi è possibile che dipendano dal suolo su cui insiste la struttura.

27. Il fenomeno dell'assestamento del terreno al di sotto delle fondazioni può essere illustrato prendendo in esame il comportamento di torri a larga base, tuttora esistenti, inserite nel corpo murario di cattedrali. È abbastanza frequente verificare che i ricorsi orizzontali di muratura nella navata principale, nel coro e nei transetti mostrano distorsioni più o meno vistose, rendendo evidente che la torre ha subito cedimenti di almeno 300 mm. In genere sull'intera superficie in pianta della torre potrebbero verificarsi pressioni medie di 1.000 kN/m^2 ($= 10 \text{ kg/cm}^2$)

abbastanza alte da rendere possibile il verificarsi di cedimenti considerevoli, ma non così elevate da provocare la completa perdita di resistenza di un'argilla consolidata.

28. L'ordine di grandezza del tempo necessario all'assestamento di un terreno sottostante a una struttura che si estende per circa 10 mq in pianta, prima che esso raggiunga l'effettivo equilibrio, è di circa una generazione. Se gli assestamenti successivi si verificano in modo non uniforme o conducono altresì a variazioni notevoli nella geometria della torre, è allora possibile che questa crolli. Crolli si verificarono, ad esempio, a Winchester, Gloucester, Worcester e Beauvais (due volte) entro un breve periodo dal completamento dei lavori. D'altro canto, una volta che il periodo di rischio, corrispondente ad una generazione, è trascorso senza il manifestarsi di danni ed ammesso che non ci siano cambiamenti nella condizione generale del suolo, la torre può senza altro ritenersi staticamente al sicuro.

29. Un approccio più sofisticato all'analisi delle murature non può non tener conto della resistenza del materiale come parametro indispensabile del problema. Comunque, **la stabilità di una struttura in muratura è assicurata non dalla sua resistenza, ma dalla sua corretta geometria globale, corretta cioè in riferimento all'andamento delle pressioni che la struttura deve sopportare.** Una volta accertato questo requisito, eventuali difetti derivanti da piccole imperfezioni risultano trascurabili. Visti da vicino, difetti come le fratture possono sembrare allarmanti; se però ci si allontana dalla struttura, questa apparirà geometricamente perfetta (l'imperfezione rimane entro l'ordine di grandezza dello spessore di un tratto di matita) e non ci si dovrà più allarmare alla vista di difetti locali. Si è già fatta l'ipotesi che il materiale non sia in grado di reagire a trazione e che la muratura possa fratturarsi; il comportamento di quest'ultima risulterà perfettamente consono a tali ipotesi. Tutto ciò che allo strutturista resta da fare è fornire una buona geometria e una fondazione ragionevole; la struttura saprà benissimo badare a se stessa.

3. STABILITA' DEGLI ARCHI: L'ANALISI LIMITE

3.1. IPOTESI DI BASE

Per l'analisi limite di un arco costituito da conci lapidei lavorati e posti in mutuo contrasto o, addirittura, senza apporto di malta, si adotta un modello discreto per il quale la struttura risulta suddivisa in elementi finiti coincidenti con i conci reali che costituiscono l'arco stesso (i metodi numerici messi a punto consentiranno l'estensione a schematizzazioni con conci 'ideali' non coincidenti con i reali; le fessurazioni teoriche saranno comunque sempre localizzate nelle interfacce fra i conci utilizzati nel modello), e viene considerato un comportamento rigido dei conci e un comportamento rigido fessurante dei giunti di collegamento. Il **modello**, detto: "**a blocchi rigidi**" e proposto da J. Heyman, si fonda sulle seguenti ipotesi.

(I) La pietra non offre alcuna resistenza a trazione.

Questa ipotesi risulta certamente verificata per la muratura costituita da blocchi assemblati a secco o con apporto di malta a scarsa resistenza e comunque essa è a favore della sicurezza.

(II) La resistenza a compressione della pietra si assume infinita.

Questa ipotesi trova giustificazione nella constatazione che, salvo eccezioni, il collasso di un arco in muratura di pietra avviene per la formazione di cerniere di apertura tra concio e concio (rotazione rigida di due conci contigui intorno al lato di contatto in corrispondenza dell'intradosso od estradosso dell'arco), e non per schiacciamento dei conci.

L'ipotesi corrisponde teoricamente ad una tensione di compressione 'infinita' nel punto di contatto tra i conci in corrispondenza della cerniera, ma in realtà è sufficiente un limitato schiacciamento locale per riportare i valori della tensione entro i limiti di rottura dei conci lapidei. L'osservazione sperimentale delle strutture ad arco conferma che la tensione media di compressione risulta essere estremamente modesta.

In altre parole, con questa ipotesi si afferma che in generale è la flessione la sollecitazione capace di produrre il collasso della struttura per formazione di un meccanismo.

Per comprendere la validità di questa ipotesi, si veda anche oltre (figg. 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7).

(III) I conci in pietra non possono scorrere l'uno rispetto all'altro.

In altre parole con ciò si ammette tacitamente che la forza tagliante parallela all'asse non ecceda mai la resistenza di attrito tra concio e concio.

Partendo da queste tre ipotesi, Heyman ha definito le procedure di applicazione dei teoremi dell'analisi limite agli archi in muratura. L'analisi strutturale che ne consegue definisce una metodologia innovativa rispetto all'analisi elastica o elasto-plastica: **la sicurezza della struttura viene indagata in funzione della sua forma, cioè da un punto di vista geometrico piuttosto che in termini di tensione e di deformazione.** In altre parole, la stabilità della struttura è assicurata non dalla sua resistenza, ma dalla corretta rispondenza della sua geometria globale all'andamento della curva delle pressioni che deve sopportare.

Sia dunque dato un arco in muratura, di spessore $t = 2h$. Sia R la risultante delle forze che si trasmettono attraverso una generica sezione retta S . Per l'ipotesi secondo la quale i conci non possono scorrere l'uno rispetto all'altro la componente tagliante T di R non influisce sul meccanismo di collasso e lo stato di sollecitazione della struttura può essere descritto da due soli parametri, rispettivamente: lo sforzo normale N ed il momento $M = Ne$ (figg. 3.1.1, 3.1.2).

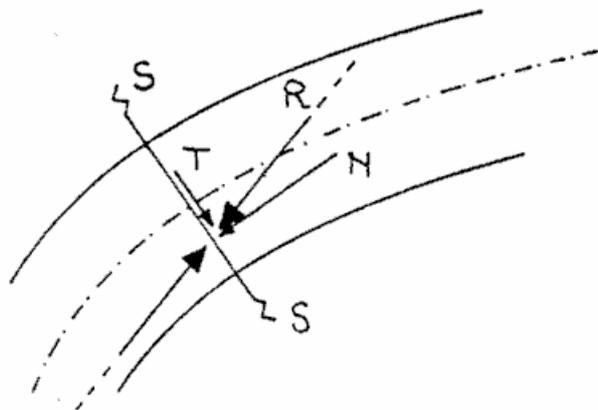


Fig. 3.1.1.

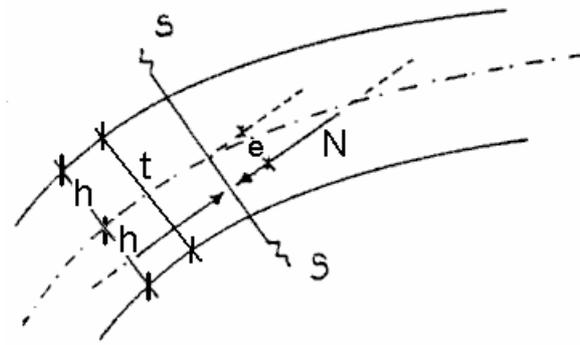


Fig. 3.1.2.

Quando $e = h$, tra due conci contigui si è formata una cerniera e dunque la condizione per la formazione di una articolazione è: $M = \pm Nh$ (fig. 3.1.3).

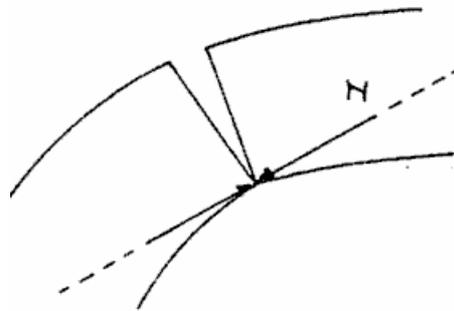


Fig. 3.1.3.

E' possibile ora costruire la curva limite nel sistema di coordinate M, N che è appunto rappresentata dalle rette di equazione $M = \pm Nh$ uscenti dall'origine O essendo il materiale per ipotesi non reagente a trazione.

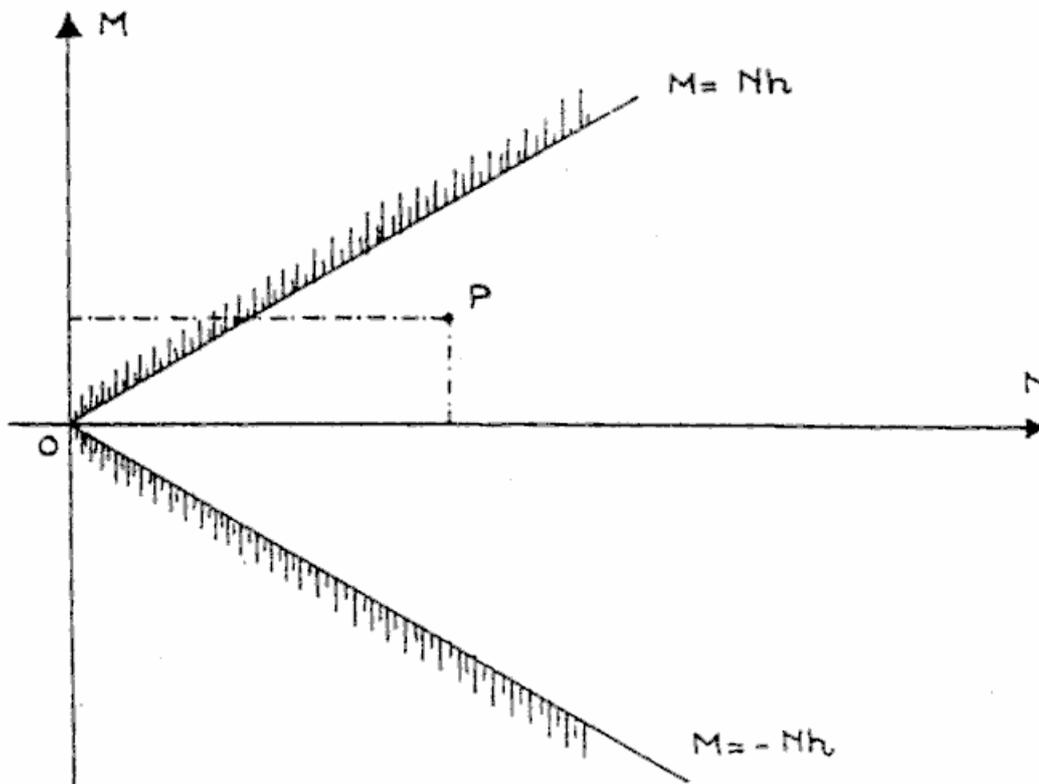


Fig. 3.1.4.

Tutti i punti P che si trovano all'interno dell'angolo formato dalle due semirette sono rappresentativi di uno stato di sollecitazione accettabile; infatti i due conci risultano ancora in contatto.

I punti che si trovano sulle semirette $M = \pm Nh$ sono invece rappresentativi della formazione di una cerniera rispettivamente all'intradosso ed estradosso dell'arco; in questa circostanza la linea delle pressioni passa per il bordo inferiore o superiore del giunto.

Tutti gli altri punti del piano, cioè quelli che si trovano al di fuori dell'angolo formato dalle due semirette, rappresentano stati di sollecitazione non ammissibili: infatti in tal caso la risultante delle forze interne cadrebbe fuori della sezione e ciò non è accettabile per l'ipotesi di non resistenza a trazione del materiale.

Se si rimuove l'ipotesi di resistenza infinita alla compressione, cioè se si assegna un materiale con resistenza finita a compressione, come è in realtà, la curva limite è rappresentata da due archi di parabola (fig. 3.1.6).

Vediamo in dettaglio.

Il calcolo a rottura per materiali non resistenti a trazione, in presenza di contemporanea azione di sforzo normale N e di momento flettente M (riferito al baricentro della sezione completa), si basa su un diagramma σ - ε in regime monoassiale del tipo della fig. 3.1.5, dove σ_0 è la tensione di rottura a compressione, mentre la tensione di rottura a trazione è nulla (supponiamo di rappresentare positivamente gli sforzi di compressione).

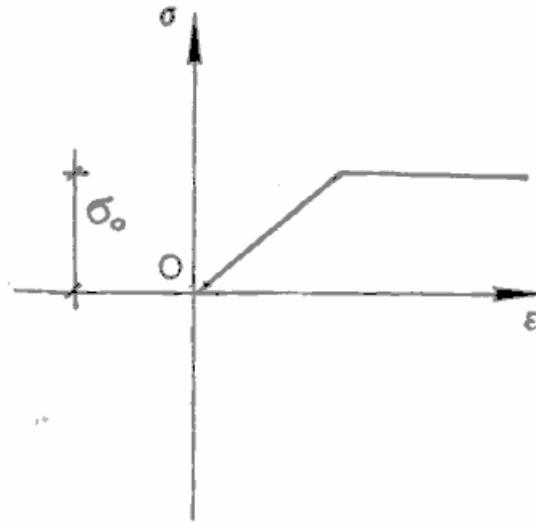


Fig. 3.1.5.

Se la sezione rettangolare ha base b ed altezza $t (=2h)$, la curva limite (NM) è costituita da due archi di parabola. Infatti, per $\Delta\phi > 0$ (arco superiore di parabola), si ha:

$$N = \sigma_0 b \xi t$$

$$M = N e = N (t/2 - \xi t/2) = N t/2 (1 - \xi) = \sigma_0 b \xi t^2/2 (1 - \xi)$$

Poiché lo sforzo normale centrato di rottura vale:

$$N_0 = \sigma_0 b t$$

si ha:

$$\xi = N / N_0$$

e quindi:

$$M = \sigma_0 b t^2/2 (N / N_0) (1 - N / N_0)$$

ovvero una parabola avente come intersezioni con l'asse delle ascisse N i punti: $N=0$ e $N=N_0$, come asse verticale la retta $N = N_0/2 = \sigma_0 b t / 2$, e come punto di massimo $(\sigma_0 b t / 2, \sigma_0 b t^2 / 8)$.

Si ha:

$$dM / dN = \sigma_0 b t^2/(2 N_0) (1 - 2 N / N_0) = t/2 (1 - 2 N / N_0) = t/2 (1 - 2 \xi) = t/2 - \xi t$$

Si ha quindi, nell'origine:

$$(dM / dN)_{\xi=0} = t/2 = h$$

e risulta così individuata la retta tangente all'origine all'arco della parabola (fig. 3.1.6).

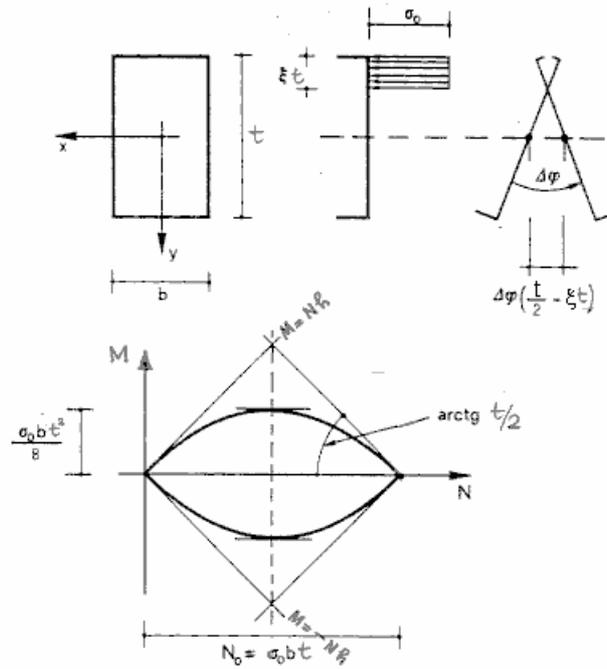


Fig. 3.1.6.

Esaminando molti manufatti lapidei, Heyman ha constatato che gli sforzi interni e le dimensioni delle sezioni sono tali da rendere ξ molto piccola (lo sforzo normale è compreso entro $1/30$ del valore massimo raggiungibile); questo consente di assimilare la curva limite alla bilatera di fig. 3.1.6, dove le inclinazioni sono fornite, come visto, dal valore $(t/2)$. Ciò corrisponde ad ammettere che la 'cerniera di apertura' si formi in corrispondenza di uno dei bordi estremi della sezione (il superiore se $\Delta\phi > 0$, e cioè se $M > 0$).

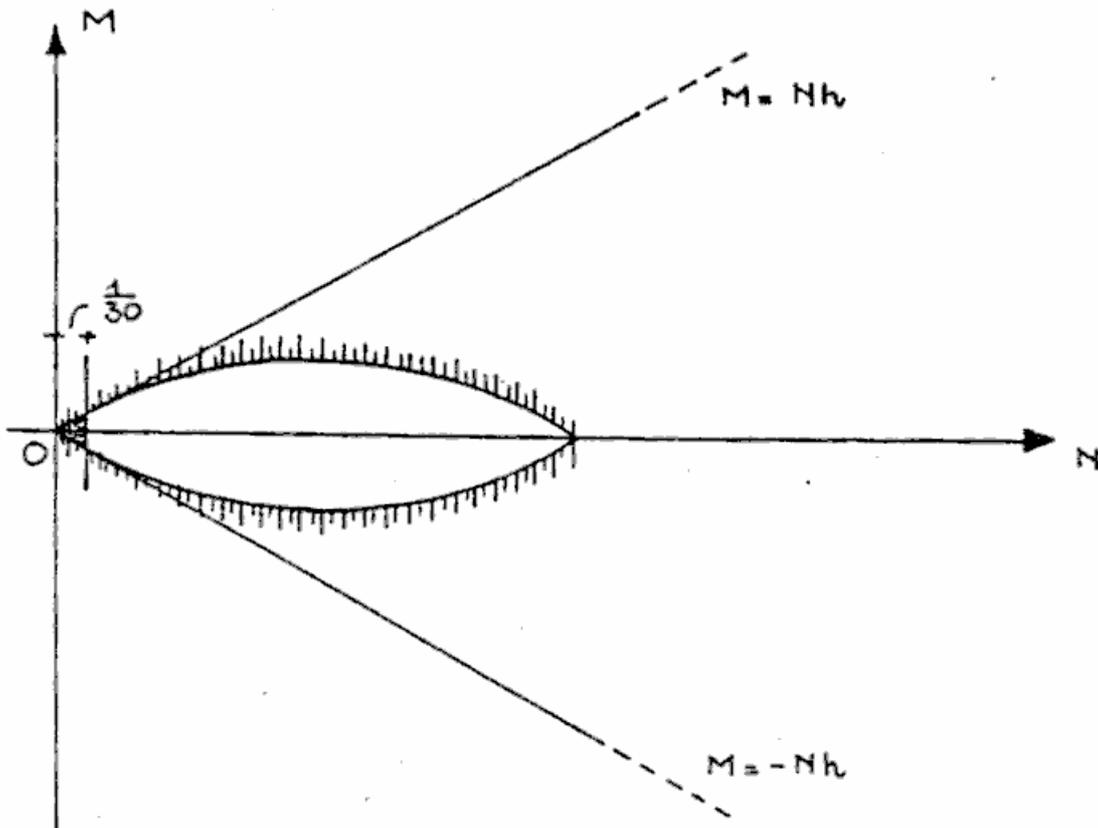


Fig. 3.1.7.

E' dunque chiaro il significato dell'ipotesi (II) di resistenza teoricamente infinita a compressione; le considerazioni fatte consentono l'adozione del dominio definito dalle due rette $M = \pm Nh$. Questa assunzione determina la forma di disequazioni che intervengono nella risoluzione del problema (p. 3.3.1.).

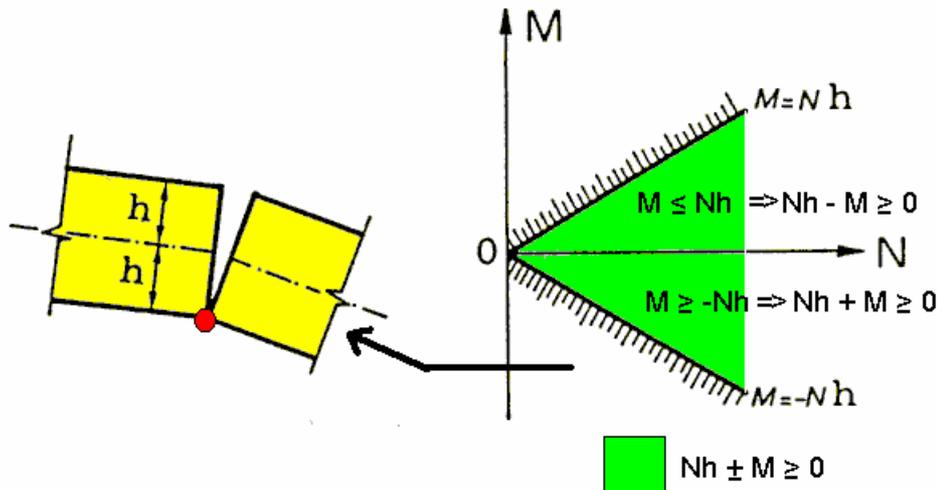


Fig. 3.1.8.

Ricapitolando, con riferimento alla fig. 3.1.8: la regione contenuta tra le due semirette $M=Nh$ e $M=-Nh$ determina gli stati ammissibili di sollecitazione per i quali non si verificano rotazioni tra i conci e, di conseguenza, la curva delle pressioni rimane ovunque contenuta nello spessore dell'arco. I punti che giacciono sulle due semirette sono rappresentativi della formazione di una cerniera all'intradosso o all'estradosso dell'arco; in tal caso la curva delle pressioni risulta tangente al bordo inferiore o superiore del giunto. Per tutti i punti esterni al dominio, si manifestano stati di sollecitazione non ammissibili per i quali la curva delle pressioni cadrebbe fuori dello spessore dell'arco.

3.2. COEFFICIENTE DI SICUREZZA

Sia dato dunque un arco incastrato soggetto a dei carichi concentrati W_1, W_2, W_3, W_4 (fig. 11).

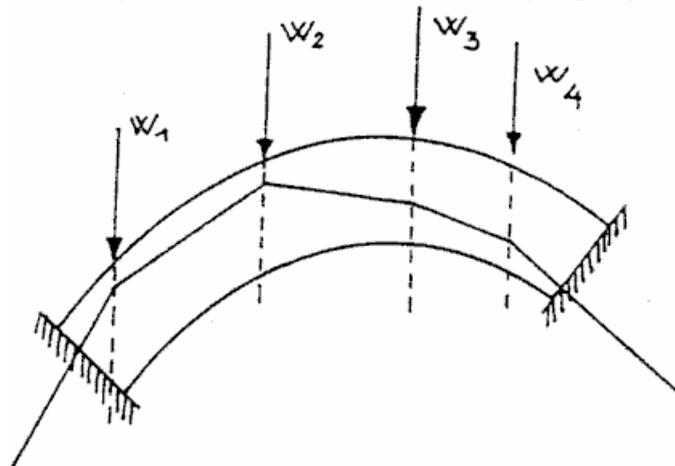


Fig. 3.2.1.

Essendo il problema iperstatico, il poligono funicolare che connette l'assegnato sistema di forze non è univocamente determinato.

Tuttavia esso deve rispettare la condizione limite di non fuoriuscita dal profilo dell'arco.

La condizione ora menzionata non tiene conto di fattori di sicurezza ed in tal senso non è affidabile; pertanto si definisce un **fattore geometrico di sicurezza** η che ha lo scopo di ridurre l'altezza utile dell'arco: $\eta d = 2h$ (fig. 3.2.2).

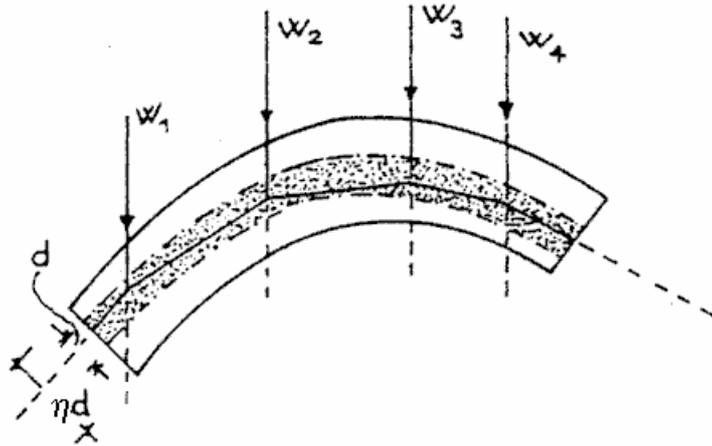


Fig. 3.2.2.

In altre parole, si considera, invece dello spessore reale dell'arco, uno spessore d ridotto secondo η e si impone al poligono funicolare di essere tutto contenuto entro l'arco immaginario di altezza d (fig. 3.2.3)

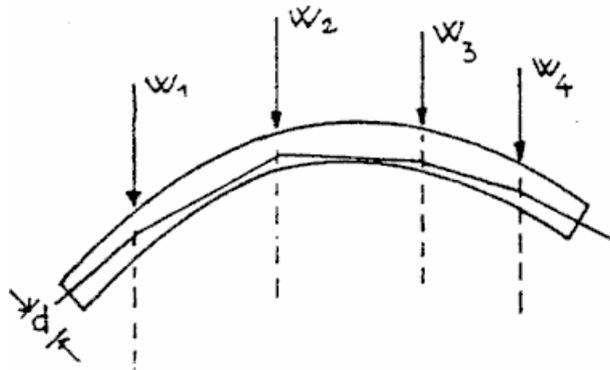


Fig. 3.2.3.

A questo proposito si fa osservare che un arco per il quale il segmento congiungente i punti di intersezione della curva di estradosso con le rette tracce dei piani di imposta è tutto interno al profilo dell'arco, l'arco è sempre stabile e non esiste quindi la possibilità che esso collassi (fig. 3.2.4).

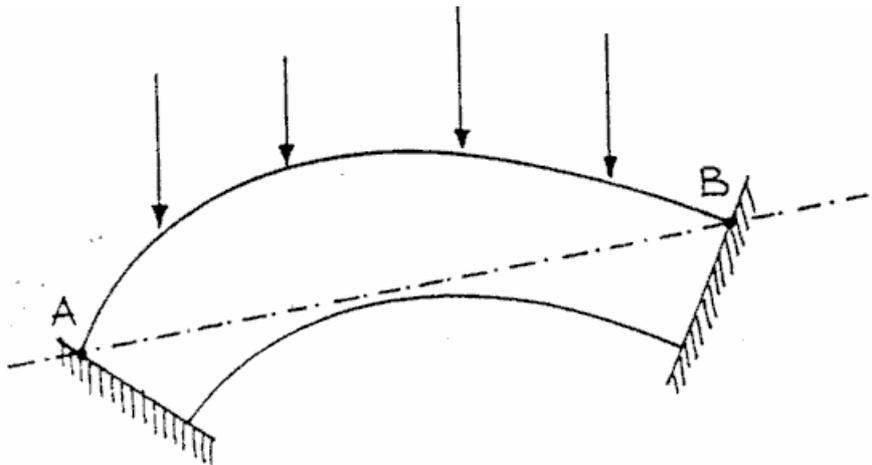


Fig. 3.2.4.

Il problema viene così ricondotto alla determinazione dell'arco di minimo spessore capace di sopportare quegli assegnati carichi, ed è evidente il significato del "coefficiente di sicurezza".

3.3. MODELLO MATEMATICO

3.3.1. FORMULAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA

Si considera un arco incastrato, costituito da 'n' conci e da 'm' = 'n+1' interfacce, su ciascuna delle quali agiscono le azioni interne N (sforzo normale), M (momento flettente) e T (taglio), per effetto del sistema di carichi applicati (peso proprio, altre azioni esterne) (fig. 3.3.1). L'arco viene discretizzato, numerando i conci e le interfacce progressivamente da sinistra a destra.

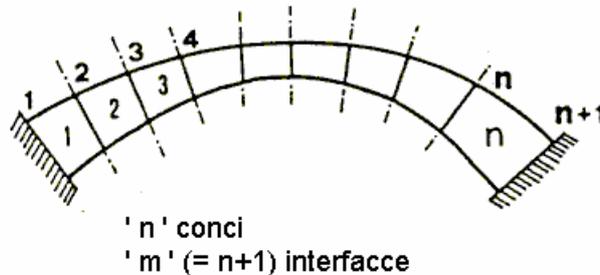


Fig. 3.3.1. Discretizzazione dell'arco in conci (=elementi finiti)

I conci costituiscono gli 'elementi finiti' del modello; l'interfaccia consente la trasmissione degli sforzi da un concio a quello adiacente. Si può fare riferimento ai conci reali, separati da interfacce costituite dai giunti di malta; ma più in generale facciamo riferimento ad una suddivisione matematica dell'arco non necessariamente coincidente con i conci reali (i metodi numerici garantiranno comunque la validità del calcolo): questo permette di usare un numero di elementi finiti non eccessivo anche per archi di grandi dimensioni.

Il problema statico è retto dalla seguente formulazione:

$$(1) \quad AN + BM + CT = F$$

(dove A, B, C sono le matrici di configurazione geometrica relative rispettivamente ai vettori incogniti N, M e T, e F è il vettore dei carichi assegnati)

sotto le condizioni:

$$(2) \quad N_i \leq 0$$

e

$$(3) \quad \begin{aligned} N_i h_i - M_i &\geq 0 \\ N_i h_i + M_i &\geq 0 \end{aligned}$$

dove $2h_i$ è l'altezza del concio i-esimo.

Le incognite sono le $3m = 3(n+1) = 3n+3$ caratteristiche di sollecitazione agenti nelle interfacce, mentre le equazioni (1) sono pari al numero dei conci: $3n$.

Il sistema lineare (1) presenta quindi un numero di equazioni insufficienti: ciò è ovvio, dato il grado di indeterminazione del problema, pari a 3 incognite iperstatiche.

Le disequazioni (2) traducono la circostanza che l'interfaccia può trasmettere solo forza normale di compressione, mentre le (3) traducono il fatto che il poligono funicolare deve essere contenuto entro la sagoma dell'arco (fig. 3.1.8).

Le infinite soluzioni del sistema (1) possono quindi essere ridotte dalle condizioni (2) e (3).

Può anche accadere che non esista una soluzione che soddisfa contemporaneamente le equazioni e le disequazioni: in tal caso, la struttura non può essere in equilibrio sotto l'assegnata condizione di carico, ossia non esiste un poligono funicolare interno alla sagoma dell'arco in equilibrio con i carichi esterni: l'arco è instabile.

Per la soluzione del problema, possono essere utilizzate tecniche di programmazione quadratica. Si preferisce tuttavia usare un metodo alternativo, meno dispendioso in termini computazionali, e più direttamente collegato al problema fisico.

Prima di illustrare il procedimento numerico, si reimposta il problema in maniera più vantaggiosa, ridefinendo il vincolo di connessione fra le facce di due conci generici attraverso tre bielle ideali delle quali una tangente e le altre due con direzione ortogonale all'interfaccia rispettivamente nei punti di intradosso e di estradosso (fig. 3.3.2).

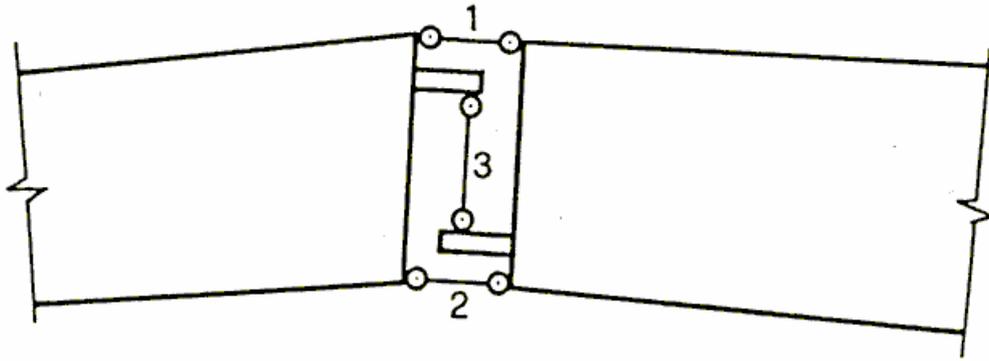


Fig. 3.3.2.

In tal modo, l'arco risulta costituito da blocchi rigidi connessi da tre bielle ideali delle quali due, quelle ortogonali all'interfaccia, a comportamento unilatero, cioè in grado di trasmettere solo sforzi di compressione (comportamento rigido-fessurante). A tale proposito occorre ricordare che sarebbe anche possibile utilizzare un dispositivo di interfaccia costituito da un numero maggiore di bielle, e magari concentrare in esse l'elasticità della struttura - rappresentativa delle caratteristiche del giunto di malta- adottando il comportamento elastico-fessurante: a tale proposito vanno riferiti i futuri sviluppi del software indicati al p. 1.).

Indicando con:

- X_{1i} = sforzo nell'interfaccia 'i' nella biella di estradosso;
- X_{2i} = sforzo nella biella di intradosso;
- X_{3i} = sforzo nella biella tangente,

ed isolando il concio i-esimo (fig. 3.3.3):

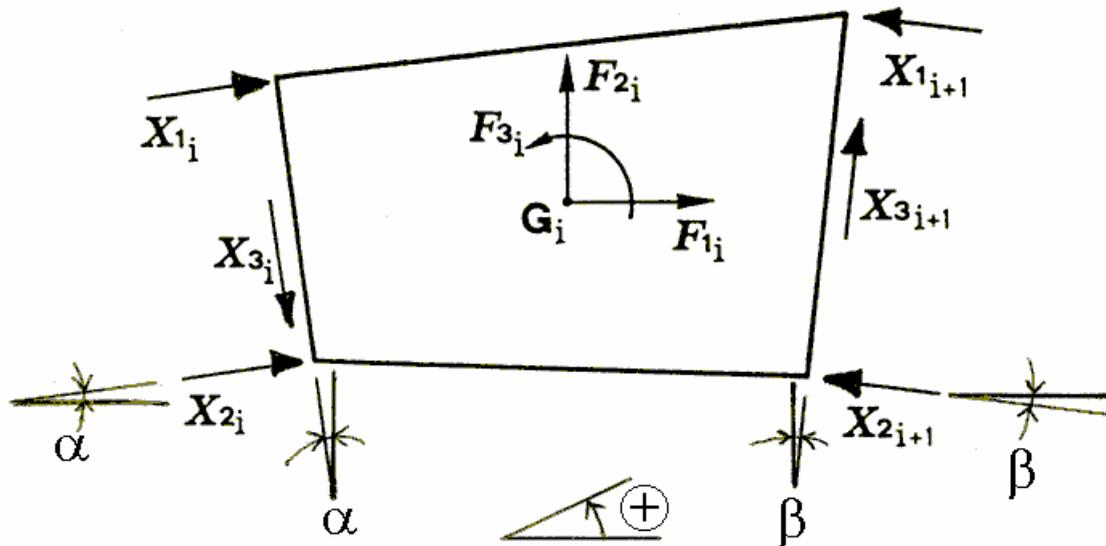


Fig. 3.3.3. Azioni sul concio i-esimo

le tre equazioni di equilibrio del concio i-esimo (interessato dalle interfacce i e i+1) divengono:

$$(4) \quad X_{1,i} \cos\alpha + X_{2,i} \cos\alpha + X_{3,i} \sin\alpha - X_{1,i+1} \cos\beta - X_{2,i+1} \cos\beta - X_{3,i+1} \sin\beta + F_{1,i} = 0$$

$$X_{1,i} \sin\alpha + X_{2,i} \sin\alpha - X_{3,i} \cos\alpha - X_{1,i+1} \sin\beta - X_{2,i+1} \sin\beta + X_{3,i+1} \cos\beta + F_{2,i} = 0$$

$$- X_{1,i} d_{1,i} + X_{2,i} d_{2,i} + X_{3,i} d_{3,i} + X_{1,i+1} d_{1,i+1} - X_{2,i+1} d_{2,i+1} + X_{3,i+1} d_{3,i+1} + F_{3,i} = 0$$

dove:

X_i = azioni interne incognite (sforzi nelle bielle), pari a $3m$ (3 bielle per ognuna delle 'm' interfacce);

si assume come positivo il verso indicato in fig. 3.3.3 (per le bielle 1 e 2 (fig. 3.3.2): $X > 0$ se di compressione; per la biella 3 (fig. 3.3.2): $X > 0$ se corrisponde ad un abbassamento del semiarco di sinistra rispetto a quello di destra (convenzione opposta a quanto usualmente adottato per lo sforzo di taglio);

F_{1i}, F_{2i}, F_{3i} = carichi esterni agenti sul concio (termini noti);

$d_{j,i}$ = distanza della direzione j (asse della biella) dal baricentro G_i del concio.

Il sistema lineare (4) può essere riscritto nella forma:

$$(5) \quad A X + F = 0$$

dove:

$$(6) \quad A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\beta & -\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\beta & -\sin\beta & \cos\beta \\ -d_{1,i} & d_{2,i} & d_{3,i} & d_{1,i+1} & -d_{2,i+1} & d_{3,i+1} \end{vmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 6}$$

$$X = \begin{vmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ X_{3,i} \\ X_{1,i+1} \\ X_{2,i+1} \\ X_{3,i+1} \end{vmatrix} \in \mathbf{R}^{6 \times 1} (\mathbf{R}^6)$$

$$F = \begin{vmatrix} F_{1,i} \\ F_{2,i} \\ F_{3,i} \end{vmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 1} (\mathbf{R}^3)$$

essendo:

A = matrice di assetto (o di configurazione geometrica, detta anche: matrice di equilibrio);

X = vettore incognito degli sforzi nelle bielle;

F = vettore dei termini noti (carichi assegnati);

$\mathbf{R}^{n \times m}$ è l'insieme delle matrici reali aventi n righe e m colonne.

Le espressioni matriciali (6) si riferiscono al concio i -esimo. Il sistema completo della struttura globale (l'arco costituito da tutti i conci) viene costruito per assemblaggio dei singoli conci, cioè dei gruppi di 3 equazioni.

Eseguito l'assemblaggio, risulta: $A \in \mathbf{R}^{3n \times 3m}$, $X \in \mathbf{R}^{3m \times 1} (\mathbf{R}^{3m})$, $F \in \mathbf{R}^{3n \times 1} (\mathbf{R}^{3n})$.

La (5) può anche essere scritta nella forma:

$$(7) \quad AX = F$$

adottando per i termini noti la convenzione sui segni opposta rispetto a quella di fig. 3.3.3 (in modo, dunque, che il carico verticale $F_{2,i}$ sia positivo se rivolto verso il basso, come ad esempio il peso proprio).

Poniamo, per semplicità:

$$3n \rightarrow n$$

$$3m \rightarrow m$$

e quindi:

$$A \in \mathbf{R}^{n \times m}, X \in \mathbf{R}^m, F \in \mathbf{R}^n.$$

Il sistema lineare è perciò 'rettangolare', cioè costituito da 'n' equazioni in 'm' incognite con $n < m$ (per l'esattezza: $n = m - 3$).

Il rango di A vale 'n', cioè le righe del sistema sono linearmente indipendenti tra loro ($\det A \neq 0$).

Se i vincoli fossero tutti bilateri, cioè le bielle 1 e 2 (fig. 3.3.2) fossero in grado di trasmettere sforzi di trazione e di compressione, il sistema presenterebbe ∞^{m-n} ($= \infty^3$) soluzioni tutte equilibrate (azioni interne in equilibrio con i carichi esterni).

Ma l'unilateralità dei vincoli (le bielle 1 e 2 possono reagire solo a compressione) impone la ricerca dell'insieme di soluzioni che soddisfano le equazioni di equilibrio (7) nel rispetto delle condizioni di segno:

$$(8) \quad X_{1,i} \geq 0, X_{2,i} \geq 0$$

Nel paragrafo 3.3.2.1. ricercheremo anzitutto l'espressione generale delle ∞^{m-n} soluzioni del sistema rettangolare avente un numero di equazioni inferiore al numero delle incognite; in seguito, nel paragrafo 3.3.2.2. introdurremo

le condizioni di segno per identificare le soluzioni realmente accettabili (cioè aventi significato fisico) per il problema in esame.

3.3.2. METODO DELL'INVERSA GENERALIZZATA

3.3.2.1. RISOLUZIONE DEL SISTEMA RETTANGOLARE

Dato un sistema lineare di n equazioni tra loro indipendenti in n incognite:

$$(9) \quad AX = F, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

con $\det A \neq 0$ (equazioni linearmente indipendenti), la soluzione può essere espressa nella forma:

$$(10) \quad X = A^{-1} B$$

dove $A^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una matrice univocamente definita, detta matrice 'inversa' di A , tale che:

$$(11) \quad A^{-1} A = I$$

e quindi:

$$(12) \quad A A^{-1} A = A I = A$$

$$(13) \quad A^{-1} A A^{-1} = I A^{-1} = A^{-1}$$

essendo I la matrice identità di ordine n .

Dato un sistema rettangolare di n equazioni in m incognite ($n < m$):

$$(14) \quad AX = F, A \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

ci proponiamo di esprimerne l'insieme delle soluzioni.

Poiché non è possibile definire una matrice inversa A^{-1} , definiamo "inversa generalizzata" di A una matrice $A^g \in \mathbf{R}^{m \times n}$ tale che:

$$(15) \quad A A^g A = A$$

(si noti l'analogia fra la (15) e la (12)). In generale, A^g non è unica.

Talvolta si richiede all'inversa generalizzata di soddisfare l'ulteriore condizione:

$$(16) \quad A^g A A^g = A^g$$

(si noti l'analogia fra la (16) e la (13)). Neppure la (16) garantisce l'unicità di A^g .

Dai teoremi dell'algebra lineare, tutte le soluzioni del sistema non omogeneo (14) sono espresse dalla somma di una soluzione particolare del sistema non omogeneo con l'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato (il sistema omogeneo è: $A X = 0$):

$$(17) \quad X = X_0 + X_N$$

L'espressione di X_N è facilmente determinabile utilizzando la definizione (15) dell'inversa generalizzata.

Se A^g è un'inversa generalizzata di A , allora il 'nucleo di A ' $N(A)$, cioè l'insieme dei vettori X tali che: $AX=0$ (insieme delle soluzioni del sistema omogeneo), è esprimibile con la seguente relazione:

$$(18) \quad N(A) = \{ X \in \mathbf{R}^m : X = (I - A^g A) M, \forall M \in \mathbf{R}^m \}$$

dove I è la matrice identità di ordine ' m '.

Infatti, posto $X' = (I - A^g A) M$, si ha:

$$(19) \quad A \cdot X' = A \cdot (I - A^g A) M = (A I - A A^g A) \cdot M$$

Ma: $A I = A$, e: $A A^g A = A$ per definizione della (15), e quindi:

$$(20) \quad A \cdot X' = (A - A) \cdot M = 0 \cdot M = 0$$

pertanto X' è tale che: $AX'=0$, come volevasi dimostrare (ricordiamo che i sistemi omogenei contengono sempre la soluzione nulla, ma hanno in generale anche altre soluzioni; per quanto detto, esse sono tutte espresse dalla (18)).

Per quanto riguarda la soluzione particolare del sistema non omogeneo, se l'inversa generalizzata rispetta la condizione (16), questa può avere la seguente espressione:

$$(21) \quad X_0 = A^g F$$

Infatti, affinché $X_0 = A^g F$ sia una soluzione particolare del sistema non omogeneo (14), occorre che:

$$(22) \quad A \cdot A^g F \equiv F$$

Moltiplicando a sinistra per A^g , si ha:

$$(23) \quad A^g A \cdot A^g F \equiv A^g F$$

e poiché per ipotesi vale la (16), l'identità è soddisfatta.

In definitiva, possiamo affermare che se A^g è un'inversa generalizzata di A soddisfacente le due condizioni (15) e (16), tutte le soluzioni del sistema non omogeneo (14) sono espresse da:

$$(24) \quad X = A^g F + (I - A^g A) M, \quad \forall M \in \mathbf{R}^m$$

Poiché A^g non è unica, è possibile sceglierla secondo un determinato criterio. Per esempio, sarà possibile riferirsi alla matrice tale da fornire la soluzione di minima norma euclidea.

[Ricordiamo la definizione di norma euclidea in \mathbf{R}^m :

$$(25) \quad N_2(X) = \|X\|_2 = (\sum_{j=1, \dots, m} |x_j|^2)^{1/2} = (X^T X)^{1/2}$$

(in algebra matriciale, il simbolo T indica la trasposizione, ossia la matrice ottenuta dallo scambio delle righe con le colonne)].

Si può dimostrare che la matrice inversa generalizzata A^g tale da fornire la soluzione di minima norma euclidea, detta "pseudoinversa" di A , è data da:

$$(26) \quad A^g = A^T (A A^T)^{-1}$$

ed è unica (si osservi che la matrice $(A A^T) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è invertibile in quanto simmetrica e definita positiva). Come si potrebbe facilmente dimostrare, essa soddisfa le condizioni (15) e (16); fra l'altro, è anche tale che:

$$(27) \quad \begin{aligned} (A A^g)^T &= A A^g, \\ e: (A^g A)^T &= A^g A \end{aligned}$$

Adottando quindi la matrice pseudoinversa, tutte le soluzioni del sistema (14) assumono la forma:

$$(28) \quad X = A^T (A A^T)^{-1} F + (I - A^T (A A^T)^{-1} A) M, \quad \forall M \in \mathbf{R}^m$$

($A \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $n < m$), essendo:

$$X_0 = A^T (A A^T)^{-1} F$$

$$X_N = (I - A^T (A A^T)^{-1} A) M, \quad \forall M \in \mathbf{R}^m$$

Si definisce la matrice C :

$$(29) \quad C = I - A^T (A A^T)^{-1} A, \quad C \in \mathbf{R}^{m \times m}$$

C è la matrice di proiezione ortogonale dallo spazio \mathbf{R}^m nel nucleo di A $N(A)$: per definizione, infatti, si ha: $X_N = C M$. Essa gode di alcune interessanti proprietà; tra le altre:

- ha rango: $r = (m - n)$ (= 3 nel problema statico esaminato);

- è semidefinita positiva, cioè: $Y^T C Y \geq 0, \forall Y \in \mathbf{R}^m$;
 - il suo determinante è nullo: $\det C = 0$, cioè si tratta di una matrice singolare.
 La (28) assume la forma:

$$(30) \quad X = X_0 + C M, \quad \forall M \in \mathbf{R}^m$$

3.3.2.2. INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI DI SEGNO

Nella (30) è presente l'arbitrarietà del vettore M.
 Dato che il sistema rettangolare (7) corrispondente al problema fisico esaminato presenta condizioni di segno, l'arbitrarietà di M può essere utilizzata per soddisfare le disequazioni (8) (si osservi che la soluzione particolare del sistema non omogeneo X_0 è invece indipendente dalle condizioni di segno).

Esplicitando le componenti dei vettori, si ha:

$$(31) \quad \begin{array}{c|c} | X_1 & | \\ | \dots & | \\ | X_j & | \\ | \dots & | \\ | X_m & | \end{array} = \begin{array}{c|c} | X_{01} & | \\ | \dots & | \\ | X_{0j} & | \\ | \dots & | \\ | X_{0m} & | \end{array} + \begin{array}{c|c} | C_{11} \dots & C_{1j} \dots C_{1m} \\ | \dots \dots & \dots \dots \dots \\ | C_{j1} \dots & C_{jj} \dots C_{jm} \\ | \dots \dots & \dots \dots \dots \\ | C_{m1} \dots & C_{mj} \dots C_{mm} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} | m_1 & | \\ | \dots & | \\ | m_j & | \\ | \dots & | \\ | m_m & | \end{array}$$

La soluzione del problema statico di stabilità dell'arco può essere individuata attraverso un procedimento iterativo sul vettore M che conduce alla determinazione, se esiste, del vettore X degli sforzi corrispondente ad una curva delle pressioni compatibile con i carichi esterni (equazioni di equilibrio) e con la forma geometrica dell'arco (condizioni di segno).

Al passo ⁽¹⁾ iniziale del procedimento iterativo, si assume: $M^{(0)} = 0$, cioè:

$$(32) \quad m_i = 0, \quad \forall i (i=1, \dots, m)$$

e quindi:

$$(33) \quad X^{(1)} = X_0$$

Se $X^{(1)}$ risulta ≥ 0 in ogni sua componente, il problema è già risolto: fra tutte le configurazioni di equilibrio ne è stata individuata una compatibile con la sagoma dell'arco. Il teorema statico dell'analisi limite ci permette di affermare che l'arco è stabile. Determinato X, si può tracciare la curva delle pressioni e calcolare le azioni interne e gli scarichi sui piedritti (reazioni d'incastro).

Diversamente, alcune componenti di $X^{(1)}$ risultano < 0 : esse corrispondono a bielle tese (sforzo inaccettabile), e devono essere "compensate", con l'iterazione successiva, in modo da giungere ad una soluzione tale che risulti $X \geq 0$ in ogni sua componente.

Al passo ⁽²⁾, ci proponiamo - fra tutte le componenti negative di $X^{(1)}$ - di compensare la biella più tesa, cioè la componente negativa di X_0 avente massimo valore assoluto: sia essa, per fissare le idee, la componente s' .
 Si procede nel seguente modo:

- si estrae da X_0 il sottovettore di ordine "1": $X_0^{(1)}$, costituito dalla componente s' ;
- si estrae da C la sottomatrice $C^{(1)}$ di dimensioni 1x1, costituita dalla componente $C_{s's'}$;
- si determina il vettore di compensazione, di ordine 1, dato da:

$$(34) \quad M^{(1)} = - C^{(1)-1} X_0^{(1)} ;$$

- si riconfigura il vettore M attraverso il valore di $M^{(1)}$, determinando il nuovo vettore soluzione:

$$(35) \quad X^{(2)} = X_0 + C M^{(1)} ;$$

al passo ⁽²⁾ l'unica componente di $M^{(1)}$ diversa da zero corrisponde alla componente s' di compensazione.

Per comprendere meglio il procedimento, visualizziamolo più esplicitamente. Nella forma (31) evidenziamo la componente s' :

$$\begin{array}{c|c} | X_1 & | \\ | \dots & | \\ | X_j & | \\ | \dots & | \\ | X_m & | \end{array} = \begin{array}{c|c} | X_{01} & | \\ | \dots & | \\ | X_{0j} & | \\ | \dots & | \\ | X_{0m} & | \end{array} + \begin{array}{c|c} | C_{11} \dots & C_{1s'} \dots C_{1m} \\ | \dots \dots & \dots \dots \dots \\ | C_{js} & C_{jj} \dots C_{jm} \\ | \dots \dots & \dots \dots \dots \\ | C_{ms} & C_{mj} \dots C_{mm} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} | m_1 & | \\ | \dots & | \\ | m_j & | \\ | \dots & | \\ | m_m & | \end{array}$$

$$(36) \begin{vmatrix} \dots \\ x_{s'} \\ \dots \\ x_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots \\ \mathbf{x}_{0s'} \\ \dots \\ x_{0m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ c_{s'1} & \dots \\ \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c}_{s's'} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{ms'} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ m_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ m_{s'} \end{vmatrix}$$

$x_{0s'} < 0$, è la più grande in valore assoluto fra tutte le componenti negative di X_0 . Secondo la (34), si pone:

$$(37) \quad m_{s'} = -1 / c_{s's'} \cdot x_{0s'}$$

Sviluppando l'equazione della riga s' della (36), si ha:

$$(38) \quad x_{s'} = x_{0s'} + \sum_{j=1, \dots, m} (c_{s'j} \cdot m_j)$$

Nella (38), tutte le m_j al passo ⁽¹⁾ sono nulle eccetto $m_{s'}$, il cui valore è fornito dalla (37). Pertanto:

$$(39) \quad x_{s'} = x_{0s'} + c_{s's'} \cdot m_{s'} = x_{0s'} + c_{s's'} \cdot (-1 / c_{s's'} \cdot x_{0s'}) = 0$$

ossia si ottiene l'annullamento della componente s' del vettore soluzione X ; in altre parole, è stato compensato lo sforzo negativo inaccettabile annullandolo.

Tornando alla (35), a questo punto se $X^{(2)}$ denuncia ancora componenti negative, occorre aumentare di 1 l'ordine del sottovettore, che quindi diventa 2 al passo ⁽³⁾, e ripetere il procedimento che stavolta interesserà la componente s' individuata al passo precedente e la componente s'' scelta ancora come la più negativa fra tutte quelle < 0 .

Esplicitando quindi l'iterazione:

- si estrae da X_0 il sottovettore di ordine "2": $X_0^{(2)}$, costituito dalle componenti s' e s'' ;
- si estrae da C la sottomatrice $C^{(2)}$ di dimensioni 2×2 , costituita dalle componenti $c_{s's'}$ e $c_{s''s''}$;
- si determina il vettore di compensazione, di ordine 2, dato da:

$$(40) \quad M^{(2)} = -C^{(2)-1} X_0^{(2)} ;$$

- si riconfigura il vettore M attraverso il valore di $M^{(2)}$, determinando il nuovo vettore soluzione:

$$(41) \quad X^{(3)} = X_0 + C M^{(2)} .$$

In generale, al passo i -esimo:

$$(42) \quad X^{(i)} = X_0 + C M^{(i-1)}$$

e le uniche componenti di $M^{(i-1)}$ diverse da zero corrispondono alle componenti $s', s'', \dots, s^{(i-1)}$ di compensazione. La soluzione al passo ⁽ⁱ⁾ è quindi ottenuta attraverso la compensazione di $(i-1)$ componenti.

Il procedimento è rapido, perché consente un numero di passi preciso: essi al massimo possono essere 4 (passo iniziale + 3 iterazioni). Al passo ⁽⁴⁾, infatti, le componenti compensate sono 3, e corrispondono all'annullamento di tre sforzi normali in tre bielle.

Poiché l'annullamento dello sforzo in una biella corrisponde alla formazione di una cerniera all'intradosso o all'estradosso (a seconda, rispettivamente, che si tratti di $X_{2,i}$ o $X_{1,i}$, vedi fig. 3.3.3), il numero delle cerniere non può essere maggiore di 3 perché l'arco si trasformerebbe in una struttura labile.

Generalizzando il metodo alla soluzione di strutture generiche a vincoli unilaterali, ciò significa che il numero delle iterazioni non può superare il grado di iperstaticità della struttura.

Nel caso dell'arco, dunque, dopo il passo ⁽¹⁾ iniziale con la soluzione X_0 di primo tentativo, possono esserci al massimo 3 iterazioni. Se il procedimento è convergente, ossia ha termine all'iterazione k ($1 \leq k \leq 3$), la curva delle pressioni (ottenuta attraverso il vettore soluzione degli sforzi nelle bielle) sarà tangente, in k interfacce, all'intradosso o all'estradosso, denunciando la formazione di k cerniere.

Se invece il procedimento non converge, ossia, eseguita la terza iterazione, continua a manifestarsi almeno un valore negativo tra gli sforzi nelle bielle, l'arco è instabile: non esiste quindi alcun poligono funicolare compatibile con i carichi applicati e con la sagoma dell'arco.

Nel paragrafo 3.3.3. viene ampiamente sviluppato un esempio di calcolo.

3.3.2.3. APPLICAZIONI AVANZATE

La metodologia di calcolo illustrata consente immediatamente, con geometria e carichi prefissati, la risposta alla domanda se l'arco sia stabile o meno. Essa può essere convenientemente utilizzata per alcune interessanti applicazioni avanzate.

Sia dato un arco avente una determinata curvatura, soggetto ad una configurazione di carico nota. Possiamo porci alcuni importanti quesiti, come ad esempio i seguenti tre.

A) Sia fissato lo spessore t dell'arco (o, equivalentemente, sia fissata la geometria dell'arco).

La configurazione di carico sia caratterizzata da una componente avente intensità parametrizzata (si pensi, ad esempio, ad un carico accidentale o a una forza sismica orizzontale, esprimibili attraverso un moltiplicatore di carico).

Qual è il massimo carico che l'arco può sopportare, ossia: qual è il massimo valore ammissibile del moltiplicatore di carico?

B) Sia fissata la configurazione di carico.

Lo spessore dell'arco sia invece variabile.

Qual è lo spessore minimo necessario affinché l'arco sia stabile?

C) Sia fissata la geometria dell'arco.

La configurazione di carico sia caratterizzata da una componente (un carico concentrato) avente intensità fissata ma punto di applicazione variabile (si pensi ad esempio, un carico accidentale mobile che interessa un arco da ponte).

Qual è la posizione più sfavorevole per l'arco, cioè quella a cui corrisponde il minimo coefficiente di sicurezza?

Le risposte alle tre domande possono essere ottenute semplicemente attraverso l'applicazione ripetuta del metodo di calcolo illustrato ai paragrafi precedenti, e vengono illustrate nei paragrafi seguenti.

3.3.2.3.1. MASSIMA INTENSITA' DI CARICO

Ci proponiamo di rispondere al quesito A) illustrato al paragrafo 3.3.2.3.

L'analisi di stabilità viene applicata per più passi consecutivi. Ad ogni passo si fa crescere progressivamente la componente di carico interessata, fino all'intercettazione di una configurazione instabile: il valore del carico al passo precedente corrisponde al massimo sostenibile e quindi rimane fissato il moltiplicatore del carico.

Alcune particolari applicazioni di questa procedura sono le seguenti.

1.) In un'analisi sismica si può - a intensità sismica prefissata - aumentare progressivamente il valore del carico accidentale sovrastante l'arco; conseguentemente varia l'entità delle forze orizzontali agenti sull'arco. Eseguendo l'analisi detta, resterà determinato il massimo moltiplicatore del carico accidentale ammissibile; e quindi, per una data zona sismica, sapremo se il locale sovrastante l'arco può avere diverse destinazioni d'uso (ad ognuna delle quali corrisponde un diverso valore del carico accidentale).

Per esempio, dato un arco con una data struttura sovrastante, ubicato in una certa zona sismica, esso potrà sostenere anziché i carichi di una civile abitazione quelli di un ufficio pubblico o di un negozio?

2.) La procedura del punto 1. può ovviamente essere applicata anche in zona non sismica: in tal caso, non vi saranno le forze sismiche orizzontali, ma la metodologia rimane inalterata: si risponde alla domanda se l'arco considerato può resistere a diversi carichi di esercizio sovrastanti.

3.) Un'altra interessante applicazione in zona sismica si ha invece quando sia fissata l'entità del carico accidentale (ad esempio, è nota la destinazione d'uso dei locali sovrastanti l'arco), ma ci chiediamo quale sia il massimo sisma sopportabile: in tal caso, faremo aumentare progressivamente il coefficiente d'intensità sismico.

Ciò consente la definizione del 'Dominio di Resistenza' sismico dell'arco.

Per esempio, consideriamo un arco inserito in un edificio posto in zona sismica, adibito a civile abitazione. Qual è il massimo valore del coefficiente sismico C (il moltiplicatore della massa sismica $W = G + sQ$) che rispetta la stabilità dell'arco?

(G = carico permanente, Q = carico accidentale, s = coefficiente di riduzione sismico, secondo il D.M. 16.1.1996; $C = (S-2)/100$ dove S è il grado di sismicità, pari a 6, 9 o 12 per le tre zone sismiche secondo le quali è classificato il territorio Italiano).

Si osservi che queste verifiche sismiche si rivolgono in genere a sottostrutture (l'arco è una struttura 'secondaria' rispetto all'edificio nella sua globalità), ed è opportuno assumere $s=1.00$ in quanto il carico accidentale può essere localmente tutto presente nella zona che interessa l'arco.

L'applicazione descritta a questo punto 3. è pienamente conforme alle recenti Direttive antisismiche emanate dal Servizio Sismico Nazionale in occasione degli eventi in Umbria e Marche del 1997, secondo le quali la sicurezza delle strutture viene definita attraverso la massima intensità sismica (cioè, il massimo coefficiente sismico 'C') sostenibile (definizione del 'Dominio di Resistenza' sismico).

4.) Un'altra applicazione del metodo incrementale sui carichi si ha, in zona sismica o non, ad esempio nel caso di archi di grande impegno statico (ponti, o importanti aperture in edifici monumentali come chiese, torri) dei quali non siano noti con certezza alcuni parametri che intervengono nel calcolo. Tali parametri possono essere: il peso proprio delle strutture stesse dell'arco, o, più frequentemente, il peso delle strutture sovrastanti. Se anche risulta noto con buona approssimazione il peso specifico dei componenti (strutture, riempimenti), può non essere certo il volume delle strutture sovrastanti che effettivamente insistono sull'arco: parametrizzandone il carico corrispondente (si tratta in pratica di un carico permanente) si potrà trovare il massimo carico sostenibile dall'arco in sicurezza, come peso e quindi anche come 'volume' o zona sovrastante di competenza.

Si ricorda infatti che qualora l'arco sostenga un paramento murario pieno, di notevole altezza, non è ipotizzabile che tutta la 'fascia' verticale sovrastante scarichi direttamente sull'arco: al di sopra di esso, si formerà un altro ideale 'arco di scarico'. L'arco di scarico può essere stimato con tecniche note: ad esempio, è possibile utilizzare la norma DIN 1053 (dicembre 1952) che definisce un 'triangolo' equilatero d'influenza a 60°. Tuttavia, può esservi un'incertezza sull'ampiezza delle sue dimensioni.

La determinazione quindi della massima zona di scarico sovrastante possibile per l'arco esaminato può assicurare maggiormente sulla stabilità dell'arco.

3.3.2.3.2. ARCO DI MINIMO SPESSORE E COEFFICIENTE DI SICUREZZA

Ci proponiamo di rispondere al quesito B) illustrato al paragrafo 3.3.2.3.

Coerentemente con quanto riportato al paragrafo 3.2., è possibile definire il coefficiente di sicurezza dell'arco esaminato (si parla di Coefficiente di Sicurezza secondo Heyman).

Un arco instabile avrà ovviamente coefficiente nullo.

Un arco stabile, invece, può essere numericamente trattato nel seguente modo.

Si riduce progressivamente (fig. 3.2.2) lo spessore 't' (=2h) dell'arco (cioè l'altezza utile della sezione trasversale), considerando costante la posizione geometrica dell'asse, e si conducono altrettante verifiche di stabilità con i carichi competenti all'arco originario reale.

In pratica, viene ridotta l'altezza utile della sezione trasversale dell'arco da 't' a 'd', ponendo:

$$(43) \quad d = t / \eta = 2h / \eta \quad \text{dove: } \eta \geq 1$$

fino ad intercettare la riduzione cui corrisponde instabilità: lo spessore 'd' competente al passo precedente, quando l'arco era ancora stabile, rappresenta lo 'spessore minimo' di compatibilità dell'arco nei confronti dei carichi applicati, ed il corrispondente η fornisce il 'coefficiente di sicurezza'.

Si osservi che se volessimo utilizzare questo procedimento a livello di progettazione, per ottimizzare lo spessore di un arco (avente un'assegnata curvatura) compatibile con una configurazione di carico assegnata, occorrerebbe per l'esattezza correggere ad ogni passo il peso proprio.

3.3.2.3.3. POSIZIONE DEL CARICO PIU' SFAVOREVOLE

Ci proponiamo di rispondere al quesito C) illustrato al paragrafo 3.3.2.3.

L'analisi di stabilità viene applicata per più passi consecutivi. Ad ogni passo, si sposta il carico concentrato (di intensità nota) a partire da una posizione prefissata, percorrendo ad esempio tutta la zona d'influenza dell'arco, con incrementi successivi. Per ogni passo, si calcola il coefficiente di sicurezza geometrico secondo le modalità illustrate al paragrafo precedente 3.3.2.3.2.

E' possibile infine costruire un grafico dove in funzione della posizione del carico viene riportato il valore del coefficiente di sicurezza: si tratta di una vera e propria linea d'influenza, dalla quale si trae immediatamente la posizione più sfavorevole del carico.

Alcune particolari applicazioni di questa procedura sono le seguenti.

1.) Per un arco da ponte, si può determinare la posizione più sfavorevole di un carico mobile agente sull'impalcato sovrastante.

2.) Un problema del genere può porsi anche dovendo collocare permanentemente un peso notevole su una struttura sovrastante un arco: è possibile quindi conoscere la posizione a maggior favore di sicurezza.

E' opportuno osservare che un ruolo importante viene svolto dalle strutture di imposta dell'arco: a rigore, la configurazione a maggior sicurezza dovrebbe tener conto anche delle sollecitazioni sulle imposte. Il metodo applicato, comunque, consente di ricavare anche i valori di sollecitazioni sulle imposte, e quindi tale valutazione può essere eseguita a parte (fermo restando che la soluzione equilibrata individuata non necessariamente coinciderà con l'effettiva, vedi anche al paragrafo seguente 3.3.2.3.4.).

3.3.2.3.4. VERIFICHE DI RESISTENZA; AZIONI SULLE IMPOSTE

La metodologia di calcolo proposta fornisce la risposta sulla stabilità dell'arco individuando un possibile poligono funicolare: dal Teorema Statico dell'Analisi Limite è infatti noto che è sufficiente individuare una curva delle pressioni in equilibrio con i carichi esterni e compatibile con la sagoma dell'arco per ricavare un giudizio positivo sulla stabilità dell'arco stesso. A tale curva delle pressioni corrisponde un campo di sollecitazioni interne.

Le modalità di collasso di un arco investono, nella realtà, anche altri aspetti oltre a quello della stabilità dell'equilibrio. In linea di principio, si devono considerare anche i seguenti fenomeni:

- crisi per scorrimento fra i giunti, dovuto al superamento della resistenza per attrito;
- crisi per schiacciamento della muratura, dovuta a eccessiva compressione;
- crisi per snervamento delle eventuali strutture di rinforzo, dovuta a eccessiva trazione.

- Verifica per scorrimento dei giunti

Utilizzando i valori dei tagli e degli sforzi normali competenti alla configurazione stabile dell'arco, è possibile eseguire la verifica per scorrimento (o verifica ad attrito) dei giunti. Perché tale tipo di verifica sia soddisfatto, occorre che il taglio T sia inferiore alla forza di attrito ($f \cdot N$), dove per f si assume il coefficiente di attrito della malta interposta fra i mattoni o i conci di pietra, o del concio sul concio nel caso di assenza di interposizione di malta (conci in mutuo contrasto tra loro).

Si ha:

$$(44) \quad f = \operatorname{tg} \alpha$$

dove α è l'angolo di attrito interno; per le malte si assume in genere: $\alpha = 35^\circ$, da cui: $f = 0.7$. In altri termini, i lati del poligono funicolare dovranno formare un angolo minore di 35° con le normali alle sezioni dell'arco (cioè alle interfacce) se non si vuole avere uno scorrimento fra i conci.

Con un coefficiente di sicurezza γ dovrà quindi essere:

$$(45) \quad T \leq f \cdot N / \gamma$$

Il coefficiente di sicurezza è composto da due contributi: il coefficiente parziale di sicurezza sui materiali γ_M e il fattore di confidenza FC . Alcune considerazioni sulle applicazioni della verifica per scorrimento sono svolte negli esempi del Vol. 3 del Manuale di SAV (Esempi applicativi - Procedure di validazione).

La verifica di scorrimento può essere priva di significato se per i conci vi è l'impossibilità di uno scorrimento reciproco, ad esempio a causa di una muratura sovrastante.

- Verifica a compressione della muratura e a trazione dei rinforzi

In una data configurazione di equilibrio stabile, per ogni sezione dell'arco è noto lo sforzo normale, composto - secondo la modellazione adottata in SAV - dai due contributi della biella di estradosso e di quella di intradosso. Lo sforzo normale può essere utilizzato per la stima della tensione di compressione della muratura, da confrontarsi con la resistenza di progetto f_{md} .

La reale distribuzione tensionale nella muratura è incognita, tuttavia è possibile avanzare alcune ipotesi ragionevoli.

In SAV la massima tensione di compressione viene calcolata sull'arco reale attribuendo allo sforzo normale N un diagramma di tensioni lineare (prescindendo dalla resistenza a trazione, la sezione è parzializzata quando l'eccentricità di N è maggiore di $s/6$, s =spessore dell'arco nella sezione di calcolo; il diagramma delle tensioni è trapezoidale se lo sforzo normale è interno al nocciolo d'inerzia, triangolare - quindi con zona reagente minore della sezione - se lo sforzo normale è esterno al nocciolo d'inerzia).

Lo studio della stabilità dell'equilibrio dell'arco non rinforzato può prevedere la formazione di cerniere: in corrispondenza di tali sezioni, la curva delle pressioni è tangente alla superficie dell'arco (esterna o interna) e la

tensione di compressione nell'interfaccia tende teoricamente ad infinito. Non vi sarebbe quindi alcuna possibilità di soddisfare la verifica a compressione.

In realtà, è possibile precisare il percorso di verifica con le seguenti considerazioni.

Da [14] si riporta testualmente un'importante osservazione.

Sperimentalmente, si è visto che in una sezione fessurata - sia essa rinforzata e quindi con apertura contrastata, o non-rinforzata e quindi con apertura libera (cerniera) - le tensioni si spalmano su una quota-parte dello spessore s pari a $s/3$ (laddove una cerniera ideale prevederebbe tensioni infinite, concentrate in una linea).

In SAV, in corrispondenza delle sezioni dove è presente trazione, sia nel caso di rinforzo che non, la massima tensione nella muratura viene calcolata adottando lo schema uniforme (rettangolare), distribuendovi lo sforzo normale agente nella biella compressa. Ciò equivale quindi a supporre che lo schiacciamento della muratura nella realtà non sia 'puntuale' ma interessi uno spessore dell'arco, supposto appunto pari a $s/3$.

Nei sistemi voltati rinforzati tale valutazione è applicata, quindi, su tutte le interfacce interessate dal rinforzo e con concio adiacente soggetto a trazione.

Per le interfacce limitrofe, dove la curva delle pressioni, pur allontanandosi dal bordo, resta ad esso molto vicina con tensioni di calcolo assai elevate, è possibile adottare lo stesso schema di schiacciamento. In SAV, una apposita opzione di calcolo (cfr. Vol. 2 del Manuale di SAV) consente il controllo che la tensione non superi il valore limite ottenuto ripartendola in un diagramma rettangolare di ampiezza $s/3$; tale controllo viene convenzionalmente svolto quando la sezione si parzializza (centro di pressione esterno al nocciolo d'inerzia).

In definitiva, il calcolo della tensione di compressione e la conseguente verifica di sicurezza nei confronti della resistenza di progetto f_{md} è possibile anche nei casi di archi non rinforzati.

L'esecuzione della verifica a compressione rende lecita l'adozione di un fattore di confidenza FC competente all'effettivo livello di conoscenza conseguito (come da Normativa vigente: cfr. §C8A.4.2.2).

Non eseguire la verifica a compressione equivale ad assumere per l'arco una resistenza a compressione infinita e conseguentemente diviene obbligatoria, secondo le Norme citate, l'applicazione del fattore di confidenza più sfavorevole (competente a LC1: 1.35) indipendentemente dal reale livello di conoscenza. Tale FC entrerà in gioco nella valutazione della capacità sismica della struttura, secondo le formulazioni dell'analisi cinematica (§C8A.4.2.2).

- Azioni alle imposte (Spinte sui piedritti)

La conoscenza delle azioni sulle imposte permetterà le verifiche sui piedritti, il cui ruolo sulla stabilità globale della struttura è evidente; l'arco non è in realtà una struttura isolata: il sistema strutturale nel suo complesso è costituito da: arco + imposte.

3.3.2.4. INSERIMENTO DI CATENE

I recenti eventi sismici hanno messo in evidenza la grande efficacia delle catene, sia come collegamento tra le murature portanti, sia ad eliminazione delle spinte delle strutture a volte o ad arco.

Relativamente alla verifica di stabilità dell'arco, nel procedimento numerico illustrato ai paragrafi precedenti, una catena viene tradotta nella presenza di un'ulteriore "biella" che, diversamente dalle "bielle" ideali (fig. 3.3.2) utilizzate per schematizzare i giunti, è in grado sviluppare soltanto resistenza a trazione.

E' quindi possibile, senza modifiche di rilievo agli algoritmi utilizzati, inserire una o più catene e condurre la verifica di stabilità dell'arco.

Nel caso in cui, nel corso del procedimento numerico, lo sforzo nella catena risulti di compressione, occorrerà una compensazione, condotta secondo le tecniche già illustrate, per il suo annullamento (la catena non può reagire a compressione). Tale operazione verrà fatta in una iterazione aggiuntiva (così detta perché il numero delle iterazioni è strettamente connesso, come visto, al grado di iperstaticità, ma la compensazione dello sforzo nella catena non corrisponde alla perdita di iperstaticità e quindi costituisce appunto un passo aggiuntivo nel procedimento iterativo).

Ovviamente, perché i risultati siano accettabili occorrerà verificare che lo sforzo di trazione nella catena sia inferiore al limite di snervamento (se desideriamo una maggior sicurezza, possiamo fare riferimento alla tensione ammissibile).

Come osservato in [7], una volta assicuratisi dell'efficacia della catena nei riguardi del collasso statico, occorre anche accertarsi che la catena resista anche nei confronti della crisi per collasso incrementale; la natura stessa del fenomeno sismico fa sì, infatti, che la catena sia sottoposta ad una serie molto numerosa di impulsi di trazione. Ognuno di questi può indurre una plasticizzazione; alla fine, la somma delle deformazioni plastiche può superare l'allungamento di rottura.

Da questa considerazione si trae che è preferibile realizzare le catene con acciaio di bassa resistenza ma alto allungamento, dimensionandone l'area con ampio margine, senza preoccuparsi eccessivamente dell'eventuale allentamento per viscosità o altre cause. Un grave errore sarebbe adoperare acciai incruditi, o peggio ancora funi di acciaio armonico. Considerazioni analoghe valgono per i cavi a collegamento delle murature.

3.3.2.5. CONSOLIDAMENTO CON CAPPA IN CALCESTRUZZO

Su un arco (o volta) notevolmente lesionato o che risulti instabile ad un'analisi dello stato di fatto, può essere previsto un intervento di consolidamento.

Alcuni tipici interventi di consolidamento sono i seguenti:

- eliminazione della spinta tramite l'inserimento di catene (di esse si è trattato al paragrafo 3.3.2.4.);
- sospensione delle volte mediante esecuzione di cappa armata sostenuta con pendini da struttura metallica sottotetto [10];
- realizzazione di una cappa armata sull'estradosso (intervento assai frequente) (fig. 3.3.4);
- realizzazione di una cappa in calcestruzzo (eventualmente armato) con spritz-beton in intradosso;
- rinforzo mediante applicazione all'intradosso o all'estradosso di compositi fibrorinforzati (p. 3.3.2.6.).

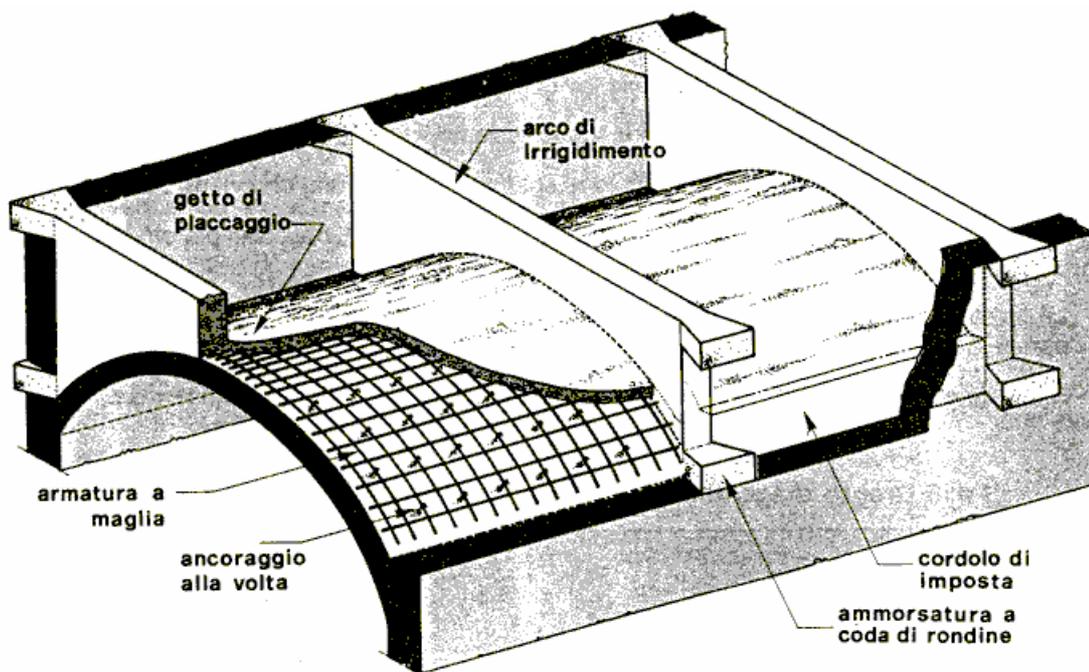


Fig. 3.3.4. Consolidamento con cappa superiore armata

In fig. 3.3.4, il consolidamento viene eseguito con l'esecuzione di una cappa superiore in conglomerato cementizio armato, ancorata ad archi di irrigidimento vincolati alle murature di perimetro.

Dal punto di vista operativo [11], effettuata la preparazione dell'estradosso della volta, anzitutto si pone in opera l'armatura adagiando la rete metallica elettrosaldata in modo che segua perfettamente la forma dell'estradosso della volta. Per ottenere ciò, la rete potrà essere tagliata, piegata, sovrapponendo debitamente le eventuali giunzioni. Si procederà quindi al collegamento della rete con la muratura, attraverso l'infissione di chiodi metallici nella stessa. Quindi si effettuerà il getto di calcestruzzo, per uno spessore non inferiore a 4 cm., costante o variabile a seconda delle indicazioni progettuali.

La cappa ha la funzione di aumentare la sezione resistente della struttura e di dare alla struttura finale (arco in muratura + arco in calcestruzzo sovrastante collaborante) la capacità di resistenza a trazione in corrispondenza dell'estradosso.

Relativamente alla verifica di stabilità dell'arco, nel procedimento numerico illustrato ai paragrafi precedenti occorre inserire la modifica illustrata nella fig. 3.3.5 (confrontare con la fig. 3.3.2).

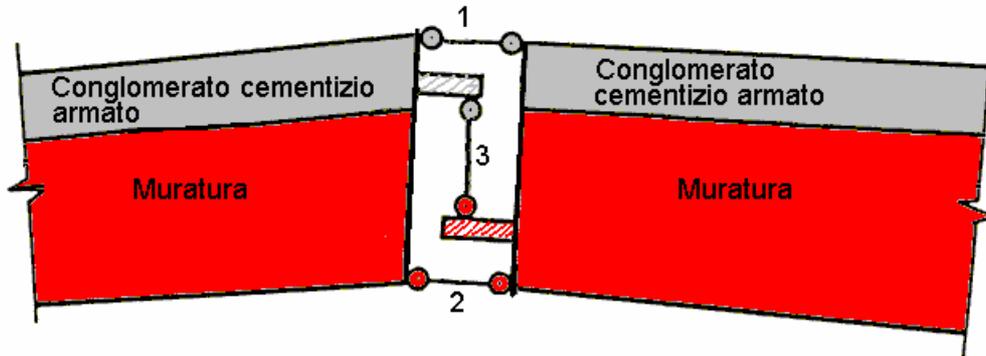


Fig. 3.3.5.

I blocchi sono costituiti da due parti, una in muratura all'intradosso e una in calcestruzzo armato all'estradosso. Si vuole schematizzare il comportamento strutturale dei conci e della loro interfaccia, mantenendo, per quanto possibile, l'impostazione della metodologia di calcolo applicabile all'arco in sola muratura. Si può ipotizzare che la biella '2', ortogonale all'interfaccia e competente alla muratura, sia sempre unilatera, cioè capace di trasmettere solo sforzi di compressione, mentre la biella '1', ortogonale all'interfaccia e competente al calcestruzzo, sia bilaterale, cioè capace di trasmettere sforzi di trazione e di compressione. Per la schematizzazione della biella '3' parallela all'interfaccia non vi sono variazioni: possono essere trasmessi sforzi di taglio positivi e negativi.

Le operazioni di compensazione riguarderanno esclusivamente le bielle di tipo 2 della parte di arco in muratura; ma è possibile affermare già a priori che l'arco risulterà sicuramente stabile in quanto è impossibile la formazione di cerniere all'estradosso (è noto che un meccanismo di collasso può formarsi solo con cerniere alternate all'intradosso e all'estradosso). Il procedimento iterativo proseguirà fino all'individuazione di una configurazione equilibrata che rispetta le condizioni sugli sforzi nelle bielle 2.

In corrispondenza di tale configurazione occorrerà rilevare gli sforzi di trazione nelle bielle 1 della parte di arco in calcestruzzo, ed accertarsi della loro compatibilità con l'acciaio e la maglia (sezione e passo) della rete elettrosaldata scelta: lo sforzo dovrà essere inferiore alla tensione di snervamento dell'acciaio stesso. Ciò affinché sia effettivamente impossibile la formazione di cerniere all'estradosso.

Nell'impostazione del calcolo, le equazioni di equilibrio dovranno riferirsi al baricentro della sezione composta. A causa del diverso peso specifico di calcestruzzo e muratura, la posizione effettiva del baricentro non sarà a metà spessore ma dovrà essere determinata con un'operazione di media pesata.

3.3.2.6. CONSOLIDAMENTO CON COMPOSITI FIBRORINFORZATI

Un'altra modalità di consolidamento di archi e volte consiste nell'applicazione di compositi fibrorinforzati. Questa tecnica è recente ed è attualmente indagine di prove sperimentali; la Normativa vigente prevede una regolamentazione della progettazione attraverso le **Linee guida per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture di c.a., c.a.p. e murarie mediante FRP**, documento approvato il 24 luglio 2009 dall'assemblea Generale del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici (cfr. in particolare il capitolo 4; si segnala anche [18], un'ottima opera editoriale riguardante l'uso dei compositi nell'Ingegneria Strutturale).

Nelle figg. 3.3.6, 3.3.7 (tratte da [12]) è riportato un esempio di prova condotta su una volta costruita con mattoni disposti in foglio, studiata con l'impiego di due tipologie di rinforzo (intradosale ed estradosale) e di due differenti tipi di fibre (carbonio e vetro).

L'interesse per questo tipo di consolidamento nasce dalla sperimentazione di nuove tecniche in cui le strutture di rinforzo siano poste in parallelo alla volta muraria esistente, generando una collaborazione in grado di incrementare resistenza e duttilità senza contemporaneamente modificare la distribuzione di masse e rigidità; quest'ultimo indesiderato effetto avviene con alcune tecniche tradizionali, quali il getto della cappa in calcestruzzo (vd. 3.3.2.5.).

La tecnica consiste nel porre in intradosso o in estradosso strutture tipicamente resistenti a trazione, quali membrane in tessuto (nastri in composito fibrorinforzato): nastri resistenti a trazione vengono applicati in estradosso o in intradosso mediante l'uso di resine in grado di garantire l'aderenza alla muratura [14] [16].

Viene quindi affiancata alla muratura una nuova struttura reagente a trazione, che garantirà di fatto la stabilità dell'equilibrio, contrastando la formazione di cerniere tali da generare un meccanismo e quindi opponendosi al collasso per cinematismo.

Per conseguenza, la verifica di idoneità statica della struttura comprende, oltre alla consueta verifica di scorrimento fra i giunti, anche le verifiche di resistenze, condotte attraverso il confronto della tensione di compressione nella muratura e della trazione nei rinforzi con i corrispondenti limiti di riferimento.

I compositi fibrorinforzati sono applicati in strisce di cui viene calibrata la larghezza e la distanza tra l'una e l'altra, in modo da garantire la voluta resistenza a trazione.



Fig. 3.3.6. Volta muraria con applicazione di compositi fibrorinforzati

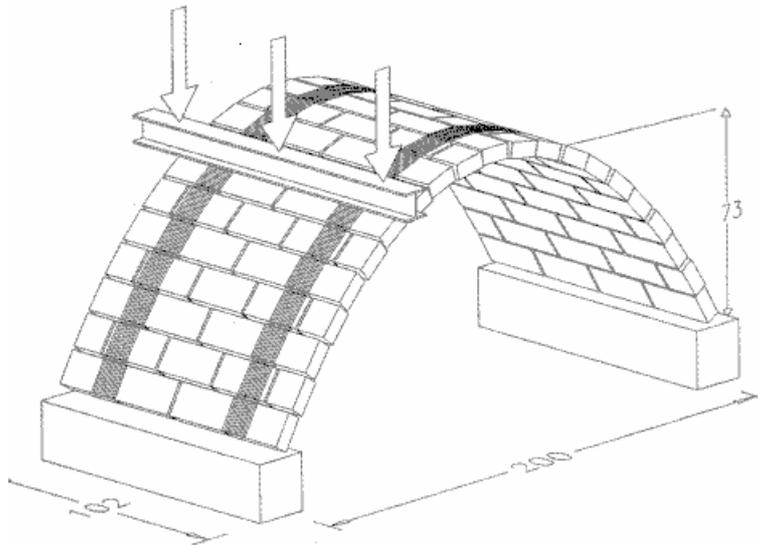


Fig. 3.3.7. Modello sperimentale di volta fibrorinforzata

Al di là della pratica operativa, la traduzione di questo intervento nel modello di calcolo numerico può essere semplicemente effettuata adottando, per i conci e le interfacce dell'arco in muratura, lo schema di fig. 3.3.2, imponendo che nella parte rinforzata (intradosso o estradosso) la biella corrispondente sia bilaterale, cioè possa reagire a trazione. Con questo tipo di consolidamento, lo spessore dell'arco resta invariato (le 'strisce' fibrorinforzate non creano, cioè, un arco di consolidamento collaborante come nel caso della cappa in c.a.). Corrispondentemente alla configurazione equilibrata determinata dal calcolo, si dovrà (analogamente al caso del c.a.) confrontare gli sforzi di trazione teorici con le capacità di resistenza delle fibre utilizzate.

Diamo infine un cenno ad una tecnica alternativa, ma concettualmente identica, consistente nel porre sulla volta armature solidarizzate alla muratura anziché membrane fibrorinforzate: è il cosiddetto caso dell'arco "armato", ampiamente descritto in [13], dove si utilizzano cavi in acciaio posti, ad esempio, in estradosso. L'obiettivo è sempre quello di integrare e migliorare le capacità di resistenza e la duttilità della struttura in muratura originaria, senza alterarne massa e rigidità.

3.3.3. ESEMPIO DI CALCOLO

Il procedimento descritto è particolarmente idoneo per l'implementazione su computer; con il software apposito anche i casi più complessi possono essere completamente risolti in modo rapido. Risulta invece essere quasi proibitivo per uno svolgimento 'manuale'. Poniamo tuttavia l'attenzione su un esempio di calcolo sufficientemente

semplice (ma, come vedremo, già numericamente complesso) da poter essere 'seguito' manualmente, in modo da comprendere l'applicazione del metodo e dell'algoritmo di calcolo.

Sia dato l'arco a tutto sesto di fig. 3.3.8. Esso costituisce la sezione trasversale di una volta a botte ad ampio sviluppo; facciamo quindi riferimento ad una profondità di 1.00 m.

Oltre al peso proprio, l'arco sostiene una sovrastruttura e sull'orizzontamento è applicato un carico distribuito, di cui consideriamo la parte permanente e quella accidentale.

Lo spessore dell'arco è di 50 cm.

Per semplicità di calcolo, si adotta una suddivisione in soli 4 conci: la metodologia numerica adottata è molto stabile, ed anche con un numero ridotto di conci riesce a cogliere la soluzione del problema statico. L'analisi fornirà l'informazione fondamentale sulla stabilità dell'arco, nonché le azioni interne in corrispondenza delle interfacce e conseguentemente la curva delle pressioni.

Ovviamente, se adottassimo un numero di conci coincidente con quelli reali, i risultati delle interfacce fornirebbero le sollecitazioni sui reali giunti; utilizzando il software, non ci sono particolari problemi ad effettuare schematizzazioni con numeri anche elevati di conci.

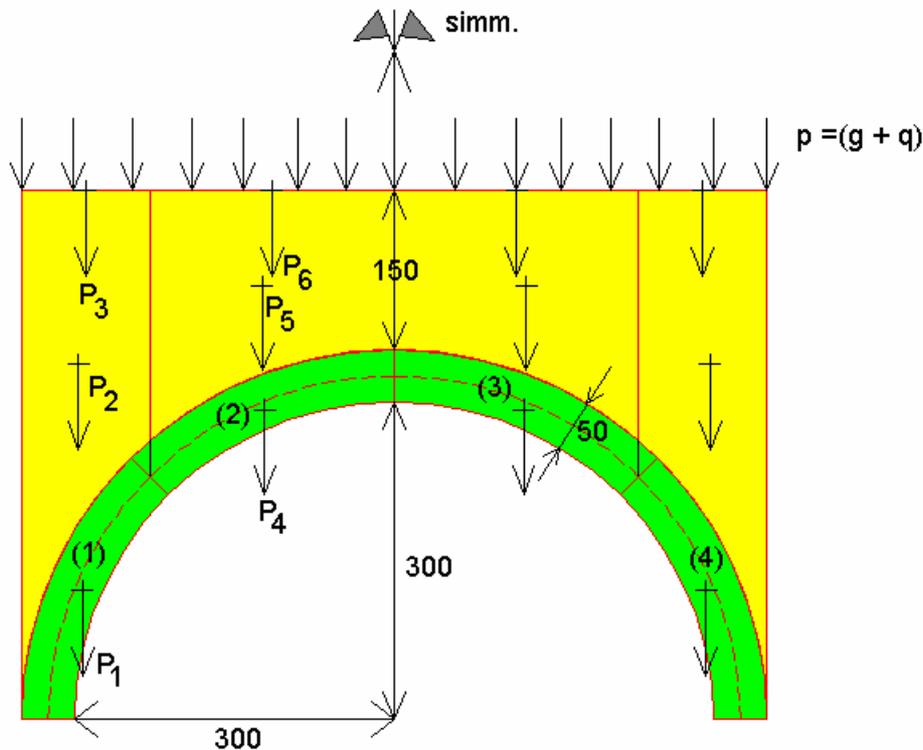


Fig. 3.3.8. Arco a tutto sesto dell'esempio di calcolo

Il peso specifico della muratura dell'arco è pari a 2000 kg/mc. Il peso specifico del riempimento è di 1100 kg/mc. Il carico di solaio è pari a: g (perm.)=150 kg/mq, q (acc.)=400 kg/mq.

Essendo la struttura simmetrica caricata simmetricamente, i conci (3) e (4) sono caratterizzati dagli stessi parametri dei conci (1) e (2).

Per ricavare facilmente aree e baricentri, l'arco è stato disegnato in CAD. Ne risultano i seguenti valori.

Concio 1:

Aree di carico x 1.00 m. di profondità:

A1 = 1.2763 mc

A2 = 3.8090 mc

A3 = 1.2019 mq

Carichi agenti:

P1 (peso proprio concio) = 2553 kg

P2 (riempimento) = 4190 kg

P3 (solaio) = 661 kg

Posizione dei baricentri (l'origine è assunta nel centro del cerchio d'arco, l'asse X è positivo verso destra e l'asse Y è positivo verso il basso):

G1 = (-2.9318, 1.2144)
 G2 = (-2.9639, 3.3565)
 G3 = (-2.8990, 5.000)

Concio 2:

Aree di carico x 1.00 m. di profondità:

A1 = 1.2763 mc
 A2 = 4.0698 mc
 A3 = 2.2981 mq

Carichi agenti:

P1 (peso proprio concio) = 2553 kg
 P2 (riempimento) = 4477 kg
 P3 (solaio) = 1264 kg

Posizione dei baricentri:

G1 = (-1.2144, 2.9318)
 G2 = (-1.2393, 4.0968)
 G3 = (-1.1490, 5.000)

Componendo per ogni concio le forze agenti, si ha (P = forza verticale diretta verso il basso, positiva; Mp = momento prodotto dall'eccentricità di P rispetto al baricentro del concio, positivo se orario):

Concio 1: P = 7404 kg, Mp = -113 kgm
 Concio 2: P = 8294 kg, Mp = -29 kgm

E' ora possibile costruire la matrice di equilibrio

		COLONNE INTERFACCIA 1			INTERF. 2			INTERF. 3			INTERF. 4			INTERF. 5			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Concio 1	1	cos α	cos α	sin α	-cos β	-cos β	-sin β										Concio 1: $\alpha = 90$ $\beta = 45$
	2	sin α	sin α	-cos α	-sin β	-sin β	cos β										
	3	-d _{1i}	d _{2i}	d _i	d _{2im}	-d _{2im}	d _{1im}										
		0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144										
Concio 2	4				1/√2	1/√2	1/√2	-1	-1	0							Concio 2: $\alpha = 45$ $\beta = 0$
	5				1/√2	1/√2	-1/√2	0	0	1							
	6				-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144							
Concio 3	7							1	1	0	-1/√2	-1/√2	1/√2				Concio 3: $\alpha = 0$ $\beta = -45$
	8							0	0	-1	1/√2	1/√2	1/√2				
	9							-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144				
Concio 4	10		1/√2 = 0.707								1/√2	1/√2	-1/√2	0	0	1	Concio 4: $\alpha = -45$ $\beta = -90$
	11										-1/√2	-1/√2	-1/√2	1	1	0	
	12										-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144	

Fig. 3.3.9. Matrice di equilibrio A

Il problema statico è retto dall'equazione: AX = F, ossia:

$$A \cdot \{ X_{11} X_{21} X_{31} X_{12} X_{22} X_{32} X_{13} X_{23} X_{33} X_{14} X_{24} X_{34} \}^T = \{ 0 \ 7404 \ -113 \ 0 \ 8294 \ -29 \ 0 \ 8294 \ 29 \ 0 \ 7404 \ 113 \}^T$$

dove A ∈ R^{nxm} = R^{12x15}

I passi da seguire sono: costruzione di A^T, matrice mxn = 15x12; costruzione di (A^T)^T, matrice nxn = 12x12, simmetrica e definita positiva; inversione di (A^T)^T: ossia, calcolo di (A^T)⁻¹ (matrice nxn); calcolo di: B = A^T

$(AA^T)^{-1}$ (matrice $m \times n$); calcolo di: $X_0 = B F$, soluzione di primo tentativo: se X_0 è caratterizzato da $X_{i,1} \geq 0$ e $X_{i,2} \geq 0$ per tutte le componenti, allora l'arco è stabile; altrimenti, si deve innescare il procedimento iterativo. Questi passi sono riportati a pagina seguente.

3. Stabilità degli Archi: L'Analisi Limite

Matrice $A^T = A$ trasposta

```

0      1      -0.5682  0      0      0      0      0      0      0      0      0
0      1      -0.0682  0      0      0      0      0      0      0      0      0
1      0      1.2144  0      0      0      0      0      0      0      0      0
-0.707 -0.707  0.5682  0.707  0.707 -0.5682  0      0      0      0      0      0
-0.707 -0.707  0.0682  0.707  0.707 -0.0682  0      0      0      0      0      0
-0.707  0.707  1.2144  0.707  -0.707  1.2144  0      0      0      0      0      0
0      0      0      -1      0      0.5682  1      0      -0.5682  0      0      0
0      0      0      -1      0      0.0682  1      0      -0.0682  0      0      0
0      0      0      0      1      1.2144  0      -1      1.2144  0      0      0
0      0      0      0      0      0      -0.707  0.707  0.5682  0.707  -0.707  -0.5682
0      0      0      0      0      0      -0.707  0.707  0.0682  0.707  -0.707  -0.0682
0      0      0      0      0      0      0.707  0.707  1.2144  -0.707  -0.707  1.2144
0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      1      0.5682
0      0      0      0      0      0      0      0      0      0      1      0.0682
0      0      0      0      0      0      0      0      0      1      0      1.2144

```

(in grassetto, l'ottava colonna di A, o ottava riga di A^T)

Matrice $(A \cdot A^T)$

```

2.4995  0.4998  -0.0941 -1.4995 -0.4998 -0.4086  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
0.4998  3.4995  -0.2278 -0.4998 -1.4995  1.3085  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
-0.0941 -0.2278  3.6045  1.3085 -0.4086  1.1473  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
-1.4995 -0.4998  1.3085  3.4995  0.4998 -0.2278 -2.0000  0.0000  0.6364  0.0000  0.0000  0.0000
-0.4998 -1.4995 -0.4086  0.4998  2.4995 -0.0941  0.0000 -1.0000  1.2144  0.0000  0.0000  0.0000
-0.4086  1.3085  1.1473  -0.2278 -0.0941  3.6045  0.6364 -1.2144  1.1473  0.0000  0.0000  0.0000
0.0000  0.0000  0.0000  -2.0000  0.0000  0.6364  3.4995 -0.4998 -0.2278 -1.4995  0.4998  1.3085
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -1.0000 -1.2144 -0.4998  2.4995  0.0941  0.4998 -1.4995  0.4086
0.0000  0.0000  0.0000  0.6364  1.2144  1.1473 -0.2278  0.0941  3.6045 -0.4086 -1.3085  1.1473
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.4998 -0.4086  2.4995 -0.4998 -0.0941
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.4998 -1.4995 -1.3085 -0.4998  3.4995  0.2278
0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  1.3085  0.4086  1.1473 -0.0941  0.2278  3.6045

```

Matrice inversa: $(A \cdot A^T)^{-1}$

```

3.0169  -0.5242  -1.8403  4.1265  -0.3625  1.0899  3.7027  1.2065  0.1009  2.0229  0.4115  -1.4862
-0.5242  0.6343  0.4758  -0.7704  0.5194  -0.3483  -0.6761  -0.1034  -0.1364  -0.4115  -0.0767  0.2947
-1.8403  0.4758  1.6542  -2.9598  0.5139  -0.8232  -2.6637  -0.7781  -0.1574  -1.4862  -0.2947  1.0851
4.1265  -0.7704  -2.9598  6.8547  -1.1657  1.2515  6.4340  1.5040  0.6645  3.7027  0.6761  -2.6637
-0.3625  0.5194  0.5139  -1.1657  1.7657  0.4171  -1.5040  0.7001  -1.0571  -1.2065  -0.1034  0.7781
1.0899  -0.3483  -0.8232  1.2515  0.4171  1.3279  0.6645  1.0571  -0.6587  0.1009  0.1364  -0.1574
3.7027  -0.6761  -2.6637  6.4340  -1.5040  0.6645  6.8547  1.1657  1.2515  4.1265  0.7704  -2.9598
1.2065  -0.1034  -0.7781  1.5040  0.7001  1.0571  1.1657  1.7657  -0.4171  0.3625  0.5194  -0.5139
0.1009  -0.1364  -0.1574  0.6645  -1.0571  -0.6587  1.2515  -0.4171  1.3279  1.0899  0.3483  -0.8232
2.0229  -0.4115  -1.4862  3.7027  -1.2065  0.1009  4.1265  0.3625  1.0899  3.0169  0.5242  -1.8403
0.4115  -0.0767  -0.2947  0.6761  -0.1034  0.1364  0.7704  0.5194  0.3483  0.5242  0.6343  -0.4758
-1.4862  0.2947  1.0851  -2.6637  0.7781  -0.1574  -2.9598  -0.5139  -0.8232  -1.8403  -0.4758  1.6542

```

Matrice: $B = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$

```

0.5215  0.3640  -0.4641  0.9114  0.2273  0.1195  0.8374  0.3387  -0.0470  0.4330  0.0907  -0.3219
-0.3987  0.6019  0.3630  -0.5685  0.4843  -0.2921  -0.4945  -0.0503  -0.1257  -0.3101  -0.0566  0.2207
0.7820  0.0536  0.1685  0.5321  0.2616  0.0902  0.4679  0.2616  -0.0902  0.2180  0.0536  -0.1685
-0.7662  0.2129  0.6432  -0.7434  0.3683  -0.5669  -0.5453  -0.2643  0.0323  -0.2762  -0.0768  0.2153
0.6989  -0.1991  -0.5955  1.3622  0.3199  0.5086  1.1188  0.6532  -0.2183  0.5173  0.1388  -0.4060
-0.2411  0.0621  0.1907  0.1338  -0.3183  0.1859  0.0884  -0.0189  0.0583  0.0673  0.0138  -0.0476
0.1382  -0.0262  -0.0822  -0.0872  0.4993  0.5418  0.0872  0.4993  -0.5418  -0.1382  -0.0262  0.0822
-0.3563  0.0798  0.2507  -0.3807  -0.2378  -0.4515  0.3807  -0.2378  0.4515  0.3563  0.0798  -0.2507
-0.1228  0.0341  0.1012  -0.3429  0.2883  0.1727  -0.3429  -0.2883  0.1727  -0.1228  -0.0341  0.1012
0.2762  -0.0768  -0.2153  0.5453  -0.2643  -0.0323  0.7434  0.3683  0.5669  0.7662  0.2129  -0.6432
-0.5173  0.1388  0.4060  -1.1188  0.6532  0.2183  -1.3622  0.3199  -0.5086  -0.6989  -0.1991  0.5955
0.0673  -0.0138  -0.0476  0.0884  0.0189  0.0583  0.1338  0.3183  0.1859  -0.2411  -0.0621  0.1907
-0.4330  0.0907  0.3219  -0.8374  0.3387  0.0470  -0.9114  0.2273  -0.1195  -0.5215  0.3640  0.4641
0.3101  -0.0566  -0.2207  0.4945  -0.0504  0.1257  0.5685  0.4843  0.2921  0.3987  0.6019  -0.3630
0.2180  -0.0536  -0.1685  0.4679  -0.2616  -0.0902  0.5321  -0.2616  0.0902  0.7820  -0.0536  0.1685

```

(in grassetto, l'ottava riga di B)

$X0 = B \cdot F$: soluzione di tentativo

(i1 = interfaccia 1; i2 = interfaccia 2, ecc.; x1 = sforzo nella biella 1, x2 = nella 2, x3 = nella 3)

```

8072.8020      i1,x1
7625.1980      i1,x2
5089.5460      i1,x3

```

```

1839.7200      i2,x1
7625.3060      i2,x2
-2266.2330     i2,x3

```

```

7882.7570      i3,x1
-2793.2120     i3,x2 : sforzo normale di trazione all'intradosso in chiave
-0.0009        i3,x3

```

```

1839.7150      i4,x1
7625.3120      i4,x2
2266.2320      i4,x3

```

```

8072.8060      i5,x1
7625.1940      i5,x2
-5089.5470     i5,x2

```

La componente 8 di X_0 risulta negativa, e pari a -2793.2120.
 Facendo riferimento alle espressioni (36), (37), si ha:

$m_8 = -1 / c_{88} \cdot x_{08}$, dove:

$$c_{88} = i_{88} - \sum_{j=1, \dots, n} b_{8j} \cdot \sum_{i=1, \dots, n} a_{i8} \quad (8^a \text{ riga di } B \times 8^a \text{ colonna di } A) =$$

$$= 1 - 0.6998 = 0.3002$$

e quindi:

$$m_8 = -1 / 0.3002 \cdot (-2793.2120) = 9304.98$$

$X = X_0 + C M$, ossia:

$$x_1 = x_{01} + c_{18} \cdot m_8 \quad (\text{tutte le altre } m_j \text{ sono nulle})$$

Si ha:

$$c_{18} = i_{18} - \sum_{j=1, \dots, n} b_{1j} \cdot \sum_{i=1, \dots, n} a_{i8} = 0 - (-0.0626) = 0.0626$$

e quindi:

$$x_1 = 8072.8020 + 0.0626 \cdot 9304.98 = 8655.7$$

e analogamente si calcolano tutte le altre componenti di X . In particolare, risulterà annullata x_8 : ciò significa che all'intradosso in chiave si ha la formazione di una cerniera.

Il procedimento è convergente. L'arco è stabile: il sistema è in equilibrio sotto i carichi applicati, e conserva due gradi di iperstaticità.

3.4. CONFRONTO CON IL METODO DEL MÉRY

Fra i metodi disponibili per la risoluzione grafica della statica dell'arco, ancor oggi molto utilizzato è il metodo del Méry. Sull'argomento, un'ampia trattazione con esempi di applicazione si trova in [9].

Per ipotesi, questo metodo è applicabile solo a strutture simmetriche caricate simmetricamente: già questa notevole limitazione giustifica l'interesse verso nuove metodologie, come quella dell'analisi limite precedentemente illustrata, in grado di analizzare strutture generiche.

Ma le critiche al metodo del Méry riguardano in realtà la sua stessa impostazione.

La teoria del Méry prevede che la curva delle pressioni sia contenuta entro il terzo medio dell'arco, passando per il suo estremo superiore alla chiave e per il suo estremo inferiore al giunto di rottura. Essa è quindi una curva limite, corrispondente allo stato in cui l'arco è sul punto di aprirsi nelle sezioni critiche per l'insorgere degli sforzi di trazione tali da superare l'aderenza della malta (fig. 3.4.1).

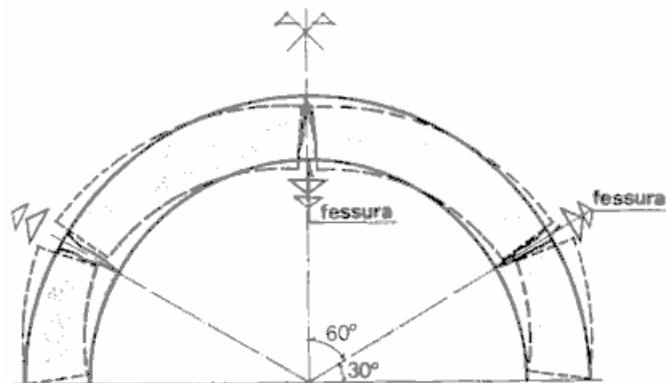


Fig. 3.4.1. Lesioni per un arco a tutto sesto

Questo metodo solo superficialmente assomiglia al metodo dell'analisi limite: costringendo la curva delle pressioni nella striscia del terzo medio, appare oltretutto a favore di sicurezza.

Ma in realtà il metodo del Méry ipotizza per lo stato tensionale un diagramma triangolare, presupponendo la formazione della cerniera perché la tensione normale al bordo sta per entrare in trazione (fig. 3.4.2). Questa è una illecita unione di formule di verifica tratte dalla teoria classica dell'elasticità e di caratteristiche di sollecitazione interna che, essendo legate a una curva a rottura, con tale teoria nulla hanno a che fare [7].

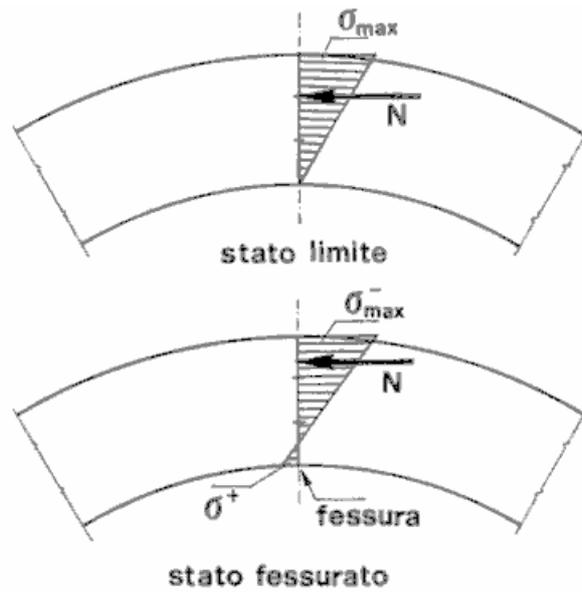


Fig. 3.4.2. Tensioni in chiave per l'arco a tutto sesto

Se tuttavia vogliamo rivedere la teoria del Méry nell'ambito della metodologia a rottura, essa può essere considerata corrispondente a un coefficiente di sicurezza $\eta = 3$ (vd. paragrafo 3.3.2.3.2.). Infatti, l'arco è sul punto di collassare e quindi la sua stabilità non consente una riduzione del suo spessore. La posizione limite della curva delle pressioni, in altre parole, corrisponde ad un 'arco' di spessore pari a $1/3$ di quello dato.

In questo senso, il metodo del Méry resta incluso nella metodologia a rottura più generale, ma si comprende che non vi è a priori alcuna necessità di imporre un coefficiente di sicurezza pari a 3: l'arco sarà esaminato per quello che è, e sarà la corretta impostazione stessa del calcolo che fornirà l'effettivo coefficiente di sicurezza.

Permane in ogni caso il fatto che il calcolo della tensione è confinato in una pura ipotesi di lavoro (vedi osservazioni al paragrafo 3.3.2.3.4.): per fissarlo in un risultato univoco occorrerebbe introdurre informazioni sull'elasticità e determinare, come già osservato, l'unica configurazione congruente oltre che equilibrata.

4. ANALISI SISMICA

L'analisi cinematica, o analisi dei meccanismi di collasso, per edifici esistenti in muratura è stata introdotta nella Normativa Sismica Italiana a partire dall'OPCM 3431/2005, e confermata nel D.M. 14.1.2008 (e più precisamente, nei contenuti della Circ.617 del 2.2.2009).

Da molto tempo era nota l'esigenza di indirizzare correttamente le verifiche locali sulle strutture murarie, considerandone la capacità di prestazione antisismica non in relazione alla resistenza del materiale, ma come stabilità dell'equilibrio, identificando la sicurezza della struttura nella cautela nei confronti della formazione di meccanismi (catene cinematiche di corpi rigidi).

Per alcune geometrie relativamente semplici, quali ad esempio pareti monolitiche o facciate di edifici, i cinematismi sono ipotizzabili a priori, scegliendo quindi un tipico corrispondente meccanismo di collasso e valutando poi l'azione orizzontale che attiva tale cinematismo.

I corpi rigidi che compongono la catena cinematica sono macroelementi di pareti, seguendo le ipotesi adottate sulle linee di frattura.

Anche per gli archi in muratura è possibile seguire una linea operativa di questo tipo, predefinendo la posizione delle cerniere (centri di rotazione della catena cinematica) e valutando conseguentemente la sicurezza. I corpi rigidi che costituiscono la catena cinematica sono tratti di arco, ognuno composto da più conci.

Tuttavia, appare certamente preferibile, se possibile, studiare il cinematismo della struttura senza imporre a priori la posizione delle cerniere: la scelta a priori, infatti, richiede ipotesi fortemente semplificative sui carichi applicati (in genere sempre considerati uniformi) e sulle geometrie strutturali (archi circolari a comportamento facilmente ipotizzabile). Questa metodologia assomiglia sostanzialmente alla scelta della posizione delle cerniere effettuata nel metodo del Méry.

Utilizzando la teoria di Heyman all'interno della metodologia ad elementi finiti, **è possibile generalizzare l'approccio cinematico, evitando la definizione a priori della posizione delle cerniere.** Fondandosi quindi sulla generalità della geometria e di entità e posizione dei carichi, spetta all'analisi stessa la definizione del meccanismo di collasso, ossia il posizionamento delle cerniere e la corrispondente identificazione dei blocchi rigidi della catena cinematica.

Il software SAV consente questa analisi generalizzata, completandola con la vetrifica di sicurezza sismica, secondo il seguente schema:

Verifica Sismica del Sistema Voltato con Analisi Cinematica

I. Analisi di stabilità della struttura (nel tipico schema rigido-fragile) per **moltiplicatori** orizzontali **crescenti**.

II. Definizione del moltiplicatore di collasso quale livello di moltiplicatore cui corrisponde l'instabilizzazione del sistema (impossibilità di rispettare le condizioni di equilibrio e di assenza di trazione, sfruttando anche 3 possibili cerniere).

III. Descrizione del cinematismo corrispondente alla configurazione instabile definita al punto precedente.

IV. Verifica di sicurezza, con calcolo dell'accelerazione sostenibile e confronto con l'accelerazione al suolo richiesta dalla Normativa.

In SAV è inoltre possibile indagare in dettaglio il comportamento dell'arco sotto l'azione di un dato moltiplicatore orizzontale.

Nel campo dell'analisi cinematica per meccanismi di collasso, in §C8A.4 si rileva che in genere si ipotizzano:

- resistenza nulla a trazione della muratura;
- assenza di scorrimento tra i blocchi;
- resistenza a compressione infinita della muratura.

Viene tuttavia suggerito che, per una simulazione più realistica del comportamento, è possibile considerare, in forma approssimata gli scorrimenti tra i blocchi, considerando la presenza dell'attrito; la presenza di catene metalliche; la limitata resistenza a compressione della muratura. Questi parametri sono attivabili nel software SAV, controllando, nel corso della ricerca del moltiplicatore di collasso, anche le verifiche ad attrito ed a compressione, nonché la presenza di strutture di rinforzo.

La prima fase dell'analisi (**I.,II.**) consiste nella definizione del moltiplicatore di collasso (frequentemente indicato con λ , o, come nella Norma di riferimento: α_0).

Al punto **III.** viene descritta la cinematica della struttura: attraverso di essa, è possibile esprimere la variazione delle posizioni dei punti di applicazione dei diversi pesi in funzione di un'unica coordinata: in SAV viene scelta, per convenzione, la rotazione dell'ultima cerniera (percorrendo l'arco dall'imposta sinistra verso la destra).

Seguendo le indicazioni della Circ.617 del 2.2.2009 (§C8A.4), la massa partecipante al cinematismo \mathbf{M}^* può essere valutata considerando gli spostamenti virtuali δ_{xi} dei punti di applicazione dei diversi pesi \mathbf{P}_i , associati al cinematismo, come una forma modale di vibrazione:

$$M^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+m} P_i \delta_{x,i} \right)^2}{g \sum_{i=1}^{n+m} P_i \delta_{x,i}^2}$$

dove: $n+m$ è il numero delle forze peso P_i applicate le cui masse, per effetto dell'azione sismica, generano forze orizzontali sugli elementi della catena cinematica (n =forze peso applicate ai blocchi; m =forze peso non direttamente gravanti sui blocchi le cui masse, per effetto dell'azione sismica, generano forze orizzontali sugli elementi della catena cinematica, in quanto non efficacemente trasmesse ad altre parti dell'edificio); $\delta_{x,i}$ è lo spostamento virtuale orizzontale del punto di applicazione dell' i -esimo peso P_i .

L'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo a_0^* si ottiene moltiplicando per l'accelerazione di gravità il moltiplicatore α_0 e dividendolo per e^* , frazione di massa partecipante al cinematismo, e per il fattore di confidenza F_c .

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \sum_{i=1}^{n+m} P_i}{M^* F_c} = \frac{\alpha_0 g}{e^* F_c}$$

Al punto **IV**. della procedura viene eseguita la verifica di sicurezza, con riferimento esplicito - data la modalità di analisi ed il contesto operativo - allo Stato Limite Ultimo (Stato Limite di salvaguardia della Vita SLV).

L'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo a_0^* deve essere confrontata: con l'accelerazione al suolo:

$$a_1^* = a_g S / q \quad [\text{cfr. (C8A.4.9)}]$$

e, in aggiunta, in caso di struttura posta ad una certa quota, con l'accelerazione assoluta alla quota di ubicazione della struttura esaminata (amplificata rispetto all'accelerazione al suolo):

$$a_2^* = S_e(T_1) * \psi(Z) * \gamma / q \quad [\text{cfr. (C8A.4.10)}]$$

In altri termini, a_1^* è la domanda in termini di accelerazione spettrale per una struttura posta su un sottostante corpo rigido, che può quindi essere analizzata come posta sul terreno anche se si trova ad una certa quota in elevazione; a_2^* è invece l'accelerazione spettrale per una struttura posta su un sottostante corpo 'deformabile': in tal caso, il fatto che la struttura esaminata sia posta ad una certa quota implica la necessità di considerare l'amplificazione dell'accelerazione al suolo.

Il significato dei parametri utilizzati nelle formule indicate è il seguente:

$S_e(T_1)$ è lo spettro elastico definito dalla Norma di riferimento, in funzione del primo periodo T_1 di vibrazione dell'intera struttura (l'edificio in cui si trova il corpo esaminato) nella direzione considerata;

$\psi(Z)$ è il primo modo di vibrazione nella direzione considerata, con Z altezza, rispetto alla fondazione dell'edificio, del baricentro delle linee di vincolo tra i blocchi interessati dal meccanismo ed il resto della struttura;

γ è il coefficiente di partecipazione modale.

Per la verifica di sicurezza deve pertanto essere soddisfatta la disuguaglianza:

$$a_0^* \geq a^*, \text{ dove: } a^* = \max \{ a_1^* ; a_2^* \}$$

Il rapporto fra a_0^* e a^* costituisce già un coefficiente di sicurezza. Tuttavia, seguendo le indicazioni normative più recenti adottate nelle analisi di vulnerabilità sismica degli edifici e nell'ambito della ricostruzione post-sisma, la sicurezza viene espressa in termini di **Indicatori di Rischio Sismico**, riferiti non all'accelerazione spettrale ma all'accelerazione al suolo PGA o al corrispondente periodo di ritorno T_R .

 **Nota bene** Gli indicatori di rischio in termini di PGA sono stati introdotti dalle verifiche di vulnerabilità condotte per gli edifici strategici ai fini della Protezione Civile o rilevanti in caso di collasso a seguito di evento sismico (in attuazione all'OPCM 3274/2003, art. 2, commi 3 e 4); successivamente, la definizione degli Indicatori di Rischio Sismico in termini sia di PGA che di T_R è stata confermata nell'ambito della ricostruzione post-sismica in Abruzzo. ■

L'**Indicatore di Rischio Sismico** (IRS), consistente nel rapporto tra Capacità e Domanda, costituisce il risultato in sintesi dell'analisi sismica della struttura. Per lo stato limite di riferimento (stato limite ultimo SLV, Stato Limite di salvaguardia della Vita), esso può essere sempre espresso in termini di PGA, e se l'analisi è stata condotta secondo

la Normativa Italiana vigente (si intende per strutture ubicate nel territorio italiano) anche in termini di periodo di ritorno T_R .

La capacità della struttura in termini di PGA (PGA,CLV) o di T_R (TR,CLV) indica l'accelerazione (o il corrispondente periodo di ritorno) sostenibili dalla struttura allo stato limite ultimo; la domanda in termini di PGA (PGA,DLV) o di T_R (TR,DLV) indica i dati dell'input sismico per la struttura esaminata. IRS risulta uguale al rapporto (PGA,CLV/PGA,DLV) o (TR,CLV/TR,DLV).

Per un Edificio Esistente sottoposto ad Adeguamento, l'Indicatore di Rischio Sismico deve essere ≥ 1.000 : in tal caso infatti la struttura ha il livello di sicurezza previsto dalla Norma di riferimento. Per un Edificio Esistente sottoposto ad un'analisi di vulnerabilità sismica nel suo Stato Attuale (oppure, per un edificio esistente danneggiato di cui si sta esaminando lo Stato prima dell'intervento, inteso come Stato Pre-sisma), IRS (che può essere < 1.000) caratterizza la sua capacità antisismica. E' possibile in tal caso studiare idonei interventi di miglioramento per incrementare IRS nel passaggio dallo Stato Attuale (o stato di fatto) allo Stato di Progetto.

I valori di IRS in termini di PGA e di T_R non sono uguali data la non linearità del legame fra PGA e T_R , ma in ogni caso sono contemporaneamente maggiori o minori di 1. Per gli indicatori di rischio in termini di T_R può essere richiesta (ad. es.: Regione Toscana, Istruzioni tecniche per edifici pubblici strategici e rilevanti) l'espressione con elevamento a potenza al coefficiente $a=0.41$ (derivato dall'analisi statistica delle curve di pericolosità a livello nazionale) al fine di ottenere una scala analoga a quella degli indicatori in PGA.

Per quanto riguarda PGA, può intendersi l'accelerazione al suolo comprensiva dell'effetto di suolo (fattore S). Il fattore di suolo può inoltre essere considerato fisso in caso di microzonazione: ne consegue che IRS in termini di PGA non varia considerando l'accelerazione su suolo rigido oppure tenendo conto degli effetti di suolo.

Per determinare il coefficiente di sicurezza in termini di IRS, viene utilizzato un procedimento iterativo volto a definire il livello di input sismico in corrispondenza del quale l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo a_0^* (capacità) uguaglia l'accelerazione spettrale richiesta dalla Normativa (domanda) a^* : PGA tale che $a_0^* = a^*$. Tale valore di PGA, identificato con PGA,CLV, permette il calcolo di IRS. Nell'ambito normativo Italiano, parallelamente, il calcolo può essere condotto in termini di T_R .

La procedura illustrata in questo paragrafo viene applicata nell'ambito degli Esempi Applicativi (cfr. Vol. 3 del Manuale di SAV), e vari dettagli sui parametri caratteristici sono descritti nel Vol. 2 (Manuale d'uso).