



## **Aedes.SAV 2026**

### **SICUREZZA E ANALISI DI VOLTE E PONTI IN MURATURA**

## **Teoria**

*Ultima revisione di questo documento: 26.01.2026*

Tutti i diritti sono riservati, anche di riproduzione parziale, a norma di legge e delle convenzioni internazionali. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta in qualsiasi forma o mezzo elettronico o meccanico, per alcun uso, senza il permesso scritto della AEDES Software per Ingegneria Civile.

© 1997-2026 AEDES Software per Ingegneria Civile

[www.aedes.it](http://www.aedes.it)

Amministrazione: info@aedes.it - Supporto tecnico: assistenza@aedes.it

### **AVVERTENZE E CONDIZIONI D'USO**

La AEDES Software si riserva il diritto di apportare miglioramenti o modifiche al programma Aedes.SAV (indicato con: SAV), descritto nella documentazione ad esso associata, in qualsiasi momento e senza preavviso.

Il software e la documentazione allegata, anche se curati con scrupolosa attenzione, non possono comportare specifiche responsabilità di AEDES per involontari errori o inesattezze: pertanto, l'utilizzatore è tenuto a controllare l'esattezza e la completezza del materiale utilizzato. Le correzioni relative ad eventuali errori tipografici saranno incluse nelle versioni di aggiornamento.

SAV è di esclusiva proprietà della AEDES e viene concesso in uso non esclusivo secondo i termini e le condizioni riportati nel contratto di licenza d'uso. L'utente non avrà diritto ad utilizzare SAV fino a quando non avrà sottoscritto la suddetta licenza d'uso.

L'utente è responsabile della scelta di SAV al fine del raggiungimento dei risultati voluti, nonché dell'installazione, dell'uso dello stesso e dei relativi risultati.

Le sole garanzie fornite dalla AEDES in merito a SAV sono quelle riportate nella licenza d'uso. La AEDES non garantisce che le funzioni contenute in SAV soddisfino le esigenze dell'utente o funzionino in tutte le combinazioni che possono essere scelte per l'uso da parte dell'utente.

I nomi dei prodotti citati nella documentazione di SAV possono essere marchi di fabbrica o marchi registrati dalle rispettive Società.

# **INDICE**

## 1. INTRODUZIONE

### 1.1. ANALISI STRUTTURALE DEI SISTEMI VOLTATI SECONDO NORMATIVA

## 2. COMPORTAMENTO STATICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA. LA TEORIA DI HEYMAN

### 2.1. L'ANALISI LIMITE PER LE STRUTTURE IN MURATURA

### 2.2. INQUADRAMENTO NORMATIVO

### 2.3. IL FATTORE GEOMETRICO DI SICUREZZA SECONDO HEYMAN

### 2.4. FONDAMENTI DI ANALISI LIMITE PER ARCHI IN MURATURA

## 3. MODELLO MATEMATICO

### 3.1. FORMULAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA

### 3.2. RISOLUZIONE DEL SISTEMA RETTANGOLARE: L'INVERSA GENERALIZZATA

### 3.3. INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI DI SEGNO

### 3.4. ESEMPIO APPLICATIVO

### 3.5. CONFRONTO CON IL METODO DI MERY

## 4. VERIFICHE DI RESISTENZA

### 4.1. VERIFICHE A COMPRESSIONE

### 4.2. IL COEFFICIENTE PARZIALE DI SICUREZZA $\gamma_M$

### 4.3. VERIFICHE A TAGLIO

### 4.4. VERIFICHE A TRAZIONE DEI RINFORZI

## 5. ANALISI CON CEDIMENTI ALLE IMPOSTE

### 5.1. TEORIA DEI CEDIMENTI ALLE IMPOSTE PER ARCHI RIGIDI

## 6. ANALISI ELASTICA (SLE)

### 6.1. GENERALITA'

### 6.2. STATO LIMITE DI ESERCIZIO

### 6.3. RISULTATI DELLE VERIFICHE DI SICUREZZA

## 7. ANALISI MODALE

### 7.1. METODOLOGIA DI ANALISI

## 8. ANALISI SISMICA

### 8.1. MOLTIPLICATORI ORIZZONTALE E VERTICALE

### 8.2. CAMPO DI FORZE INERZIALI VERTICALI

### 8.3. ANALISI SISMICA IN DIREZIONE TRASVERSALE E COMBINAZIONE DIREZIONALE

## NORMATIVA DI RIFERIMENTO

## BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

## 1. INTRODUZIONE

Il software Aedes.SAV è dedicato allo studio del **comportamento strutturale di archi e volte in muratura**. Il modello è di tipo piano e analizza una singola campata, composta da arcata e piedritti, ed è in grado di tenere conto delle azioni trasversali, ad esempio di origine sismica, e delle forze di interscambio fra campate adiacenti nel caso di sistemi voltati multicampata.

Per **arco in muratura** si intende una struttura di tipo monodimensionale, costituita da elementi lapidei o in laterizio, detti conci, posti direttamente in mutuo contrasto o assemblati con interposizione di letti di malta. L'analisi degli archi in conci di pietra o in muratura di mattoni può essere affrontata studiando la **stabilità della struttura con analisi limite**.

Nota la geometria, i vincoli esterni e la posizione dei carichi, si fa ricorso a procedimenti che permettono di determinare per quale valore dei carichi e/o dei cedimenti delle imposte avverrà il collasso dell'arco.

'Stabilità' deve essere intesa nel senso della Meccanica Razionale, non della Scienza delle Costruzioni dove assume il significato di ricerca del carico critico.

In analisi limite il sistema è costituito da un insieme di conci rigidi, reagenti a sola compressione, tra loro interagenti (elementi finiti) che si trasmettono sollecitazioni attraverso l'interfaccia (eventualmente costituita da malta) che diviene sede delle fessurazioni; il collasso della struttura, sotto progressivi incrementi di carico, avviene per formazione di un meccanismo di tipo rigido determinato dall'apertura di quattro cerniere poste alternativamente sulla curva di intradosso ed estradosso dell'arco in modo da garantire una configurazione cinematicamente compatibile. Il carico corrispondente è il carico limite che la struttura può sostenere.

Lo scopo dell'analisi consiste nei seguenti due punti fondamentali:

- la **ricerca dell'esistenza di una configurazione equilibrata** nel rispetto delle condizioni al contorno ed in particolare del contenimento della curva delle pressioni all'interno della sagoma dell'arco; è questa la verifica di sicurezza per stabilità sotto l'azione dei carichi previsti;
- la **valutazione del moltiplicatore di collasso**, corrispondente al carico limite:

in analisi statica, qualora esistano carichi variabili che possono essere affetti da moltiplicatori, tale valutazione permette di definire l'indicatore di rischio  $\zeta_v$  in termini statici;

in analisi sismica, per effetto delle azioni sulle masse dovute alla domanda, il risultato sulla capacità (massima intensità sismica sostenibile dalla struttura prima del collasso), attraverso il confronto con la domanda (richiesta sismica) consente la definizione dell'indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$ .

In questa schematizzazione, dunque, alle equazioni di equilibrio non vengono associate le condizioni di congruenza, che chiamano in gioco la deformabilità del materiale. I classici parametri del comportamento elastico (moduli di elasticità) non svolgono alcun ruolo: **il sistema strutturale è di tipo rigido-fragile ed è in grado di trasmettere le azioni interne finché, con l'incremento del carico, raggiunge la condizione di cinemismo e la crisi si manifesta con le caratteristiche della fragilità**.

Nel modello rigido-fragile la fessurazione viene concentrata nei giunti di malta o in corrispondenza delle interfacce tra conci. La grande differenza tra i valori dei parametri meccanici che rappresentano la deformabilità della pietra e della malta rende accettabile l'ipotesi di conci indeformabili permettendo così di schematizzare la struttura con un insieme di elementi rigidi collegati da vincoli soggetti a fessurazione. Gli studi sull'analisi limite applicata alle strutture murarie sono stati condotti da Heyman [B.1] e riformulati con metodi di calcolo moderni ad elementi finiti [A.1], generando l'approccio teorico-applicativo implementato nel software SAV.

Alla curva delle pressioni ottenuta, ove possibile, come soluzione del problema strutturale, viene associato un **campo di sollecitazioni tensionali** valutato con le leggi elastoplastiche: questo rende possibile la determinazione di una capacità strutturale dovuta non solo alla stabilità ma anche ai limiti di resistenza a

compressione e a taglio, secondo un approccio considerato soddisfacente ai fini della determinazione dei coefficienti di sicurezza [A.1] [B.2].

Fin dalla prima versione (2000), il software SAV ha proposto analisi statiche e analisi sismiche, con calcolo dei corrispondenti moltiplicatori di collasso che consentono la definizione degli indicatori di rischio statico e sismico, via via adattati in base alle disposizioni della Normativa tecnica vigente.

Nel corso delle annualità, progressive modifiche e integrazioni introdotte nel software hanno esteso il campo applicativo a un insieme più vasto di strutture.

Le arcate possono avere varie forme geometriche (circolare a tutto sesto, a sesto ribassato o zoppo, a sesto acuto, policentrico, ellittico, piattabanda o arco definito per punti) e parametri variabili per quanto riguarda lo spessore (altezza dei conci nel piano medio dell'arco) e la profondità (dimensione dei conci nel piano ortogonale al piano medio dell'arco). Il modello piano comprende implicitamente il caso della volta a botte, di cui l'arco è una sezione trasversale; per volte di altra natura è possibile ricondursi al caso dell'arco semplice mediante una preliminare scomposizione. La possibilità di modellare imposte verticali e tratti orizzontali estende il campo di applicazione a casi particolari quali ad esempio arcate di ponti multicampata verticalmente disallineate o volte a schifo (quest'ultime caratterizzate dal tratto centrale piano orizzontale).

E' stata introdotta una capacità di resistenza a trazione che può essere assegnata all'arco attraverso opportuni interventi di consolidamento: cappa in calcestruzzo, applicazione di compositi FRP / FRCM.

E' inoltre previsto l'intervento di 'arco armato', che affianca all'arco murario cavi in acciaio tesi in grado di indurre compressione nell'arco e quindi stabilizzare il sistema.

Opportune funzioni consentono la modellazione del rinforzo dovuto ai frenelli, in grado di ridurre la luce resistente dell'arco e ricondurre l'originario comportamento a tutto sesto a quello di un arco ribassato.

Nelle verifiche di resistenza del materiale è stata inoltre introdotta la possibilità di una pur minima capacità di resistenza a trazione della muratura: in alcuni casi, è così possibile ottenere risultati più aderenti al comportamento reale evitando penalizzazioni sul giudizio relativo alla sicurezza strutturale.

Al campo di sollecitazioni determinato in base alla posizione della curva delle pressioni è associato l'arco reagente, ossia lo scheletro compresso strettamente necessario per la resistenza ai carichi applicati. Le zone non reagenti divengono in tal modo oggetto di osservazione mirata alla definizione del sistema di microfessurazioni che di per sé non corrispondono a una vera e propria formazione di cerniere, ma indicano le zone di materiale non reagente dove potrebbero manifestarsi fenomeni di degrado.

Agli archi veri e propri è stata affiancata l'analisi dei piedritti. Oltre ai sistemi voltati singoli, sono stati previsti sistemi multicampata, dove più modelli singoli interagiscono fra loro attraverso azioni di interscambio trasmesse sulla sommità dei piedritti. Tipiche applicazioni in tal senso sono costituite dai ponti multicampata, dove le condizioni di carico che interessano più campate vengono considerate in modo coerente nei vari sottomodelli al fine di ottenere moltiplicatori di collasso e sollecitazioni riferite all'insieme del sistema voltato.

Per i sistemi multicampata SAV agisce combinando le soluzioni strutturali delle singole campate, seguendo il metodo 'per componenti' proposto dalla normativa di riferimento del settore (rif.: CNR-DT 213/2015).

Nel caso dei ponti, oltre ai carichi che insistono sulle arcate sono previste spinte del terreno che agiscono sulle spalle in condizioni di riposo, attive o passive, statiche e sismiche, adeguatamente valutate in base alla snellezza delle spalle stesse.

E' stata inoltre introdotta la resistenza passiva che le strutture di riempimento limitrofe all'arcata possono esercitare sull'arcata stessa garantendone l'equilibrio. Le resistenze passive possono svolgere un ruolo rilevante nel caso delle volte impostate su pareti murarie perimetrali di un edificio, rinviando alla stabilità della parete nel suo complesso il compito di resistere alle spinte statiche e sismiche provenienti dalla volta.

I materiali costituenti il sistema voltato possono essere non solo di tipo murario, ma anche calcestruzzo: per i sistemi voltati (in particolare, per i ponti) i contenuti normativi vigenti hanno proposto un'equiparazione fra muratura e calcestruzzo non armato o debolmente armato (rif.: Linee Guida 2022 per i Ponti esistenti). Per i ponti, l'analisi del sistema voltato è stata estesa ai ponti obliqui, particolare categoria dei ponti esistenti ad arco massiccio, stradali o ferroviari.

E' stata sviluppata l'analisi per carichi mobili, con lo scopo di determinare la posizione più sfavorevole dei carichi variabili, in particolare di quelli concentrati. Tale analisi trova applicazione sia nei ponti, sia nelle volte degli edifici sottoposte a carichi non uniformemente distribuiti.

L'analisi limite consente inoltre lo studio della configurazione di equilibrio e di collasso sotto l'effetto di cedimenti traslazionali (verticali e/o orizzontali) e/o rotazionali alle imposte.

Ulteriori sviluppi dell'analisi sismica consentono la piena applicazione delle disposizioni normative, attraverso la combinazione direzionale (con inclusione della componente sismica trasversale al piano dell'arco, particolarmente significativa per la stabilità delle pile dei ponti) e la componente sismica verticale i cui effetti, sia nelle volte degli edifici, sia nei ponti, possono influire in generale in modo significativo sulla stabilità del sistema voltato.

All'analisi limite, dedicata allo studio degli stati limite ultimi (SLU:EQU in statica e SLV in sismica) si affiancano l'analisi elastica (per lo studio degli stati limite di esercizio SLE) e l'analisi modale (per il calcolo dei modi principali di vibrazione). Le analisi elastica e modale richiedono una modellazione alternativa a quella dell'analisi limite, dovendo chiamare in causa la deformazione attraverso i parametri elastici che descrivono il materiale. Le verifiche di capacità vengono in tal caso svolte in termini di sola resistenza, non essendo consentito in esercizio il raggiungimento di una condizione ultima di collasso.

Il presente documento è dedicato alle impostazioni teoriche fondamentali del software Aedes.SAV, con cenni ad alcuni aspetti applicativi (ad esempio, le verifiche di sicurezza per vari tipi di rinforzi). Maggiori dettagli operativi sulla progettazione condotta con SAV e altre funzionalità a carattere teorico sono illustrate nella documentazione dedicata agli esempi applicativi forniti a corredo del software. Si rinvia a tale documentazione per approfondimenti vari, quali ad esempio: i fondamenti teorico-applicativi dell'analisi di ponti in muratura e calcestruzzo massiccio stradali e ferroviari, mono- e multi-campata; le spinte passive da riempimento; l'analisi di volte spaziali eseguita mediante scomposizione negli archi costitutivi.

#### *Nota sulla simbologia.*

Nei paragrafi seguenti i riferimenti normativi sono abbreviati nel seguente modo:

**NTC** = NTC 2018 = D.M. 17.1.2018: "Aggiornamento delle Norme tecniche per le costruzioni", Supplemento ordinario alla "Gazzetta Ufficiale", n.42 del 20 febbraio 2018. Per i paragrafi che iniziano con §C si fa riferimento alla Circolare 21.1.2019, n. 7 C.S.LL.PP.: Istruzioni per l'applicazione dell'«Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"» di cui al decreto ministeriale 17 gennaio 2018

**CNR-DT 213** = CNR-DT 213/2015: "Istruzioni per la Valutazione della Sicurezza Strutturale di Ponti Stradali in Muratura"

**LG 2022** = Linee guida per la classificazione e gestione del rischio, la valutazione della sicurezza ed il monitoraggio dei ponti esistenti, allegate al parere del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici n. 54/2022, espresso dall'Assemblea Generale in data 10.06.2022

**EC2** = Eurocodice 2 - Progettazione delle strutture in calcestruzzo. UNI EN 1992-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

**CNR-DT 215** = CNR-DT 215/2018 "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati a Matrice Inorganica"

**CNR-DT 200 R1** = CNR-DT 200 R1/2013 "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati. Materiali, strutture di

c.a. e di c.a.p., strutture murarie"

**LG 2009** = Linee guida per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture in c.a., c.a.p. e murarie mediante FRP, Documento approvato il 24.07.2009 dall'assemblea Generale Consiglio Superiore LL PP

Il simbolo § unito alla sigla della Norma tecnica si riferisce al documento normativo indicato; in assenza di riferimento normativo, si riferisce ai paragrafi del presente documento.

## 1.1. ANALISI STRUTTURALE DEI SISTEMI VOLTATI SECONDO NORMATIVA

I documenti normativi di riferimento specificano le modalità di analisi strutturale dei sistemi voltati in muratura e in calcestruzzo massiccio. Con riferimento alle metodologie implementate nel software SAV, si evidenziano i seguenti punti.

Per l'**analisi degli stati limite ultimi SLU di tipo statico (EQU) e di tipo sismico (SLV)**, in SAV si applica la metodologia dell'analisi limite (calcolo a rottura) idonea per lo studio dei meccanismi di collasso e della stabilità dei sistemi voltati. Nell'analisi limite vengono definiti i moltiplicatori di collasso sia per carichi statici sia per carichi sismici e dei conseguenti indicatori di rischio.

Per l'**analisi dello stato limite di esercizio SLE**, SAV applica il metodo dell'analisi elastica non lineare con muratura non reagente a trazione.

I riferimenti normativi sugli Stati Limite da analizzare e le relative verifiche di sicurezza sono riportati in sintesi nei punti elencati nel seguito, tenendo conto che i metodi di analisi per le strutture murarie esistenti ad arco sono trattate in dettaglio in CNR-DT 213, documento normativo dedicato ai ponti in muratura e le cui indicazioni costituiscono un riferimento generale per i sistemi strutturali voltati in muratura.

Le CNR-DT 213 costituiscono altresì un riferimento per i ponti esistenti ad arco in calcestruzzo non armato o debolmente armato, in quanto strutture massicce assimilabili alle strutture in muratura. In generale per i ponti esistenti viene fatto riferimento anche a LG 2022.

**§3.5.3 CNR-DT 213: Stati Limite di riferimento per il controllo della sicurezza strutturale:** anche se NTC per le strutture murarie consente di omettere la verifica per lo Stato Limite di Esercizio (cfr. §4.5.6.3 NTC), la struttura deve essere controllata per gli Stati Limite Ultimi di Perdita di Equilibrio (EQU) e di Salvaguardia della Vita (SLV), e per lo Stato Limite di Esercizio (SLE), assimilato allo Stato Limite di Danno SLD.

**§3.5.1 CNR-DT 213:** lo stato limite EQU include lo stato limite di collasso per meccanismo articolato. Nel caso dei ponti in muratura deve essere verificato attraverso l'equivalente Teorema Statico del Calcolo a Rottura, verificando la esistenza di un sistema di sollecitazioni in equilibrio con la condizione di carico verificata e compatibile con le proprietà resistenti del materiale murario. In questo senso la verifica allo stato limite EQU incorpora anche la verifica allo stato limite STR (stato limite di resistenza della struttura). SLV (stato limite di salvaguardia della vita) si riferisce alle verifiche sismiche (§3.2.1 NTC) e §3.12 CNR-DT 213 conferma che la verifica per azioni sismiche può essere condotta con riferimento al solo SLV, tenendo conto che in generale il collasso di una struttura muraria voltata è determinato, più che dal superamento di limiti di sforzo, dalla variazione della sua geometria. Definite le forze sismiche, e cioè i carichi rappresentativi dell'azione sismica, la verifica per SLV fa riferimento ai metodi di analisi illustrati in §8,§9 CNR-DT 213.

Nel rispetto delle indicazioni normative, **il software SAV utilizza i seguenti metodi di analisi e verifica della sicurezza:**

- **per EQU (verifica statica allo stato limite ultimo)** sotto combinazioni di tipo fondamentale ([2.5.1] in §2.5.3 NTC) e **per SLV (verifica sismica per stato limite di salvaguardia della vita):**

**metodo del Calcolo a Rottura (Analisi Limite, §8.4.4 CNR-DT 213)**, con cui si determina l'esistenza di un sistema di sollecitazioni in equilibrio e, mediante corrispondenti verifiche a compressione e a taglio, la compatibilità con le proprietà resistenti del materiale murario (per una completa illustrazione della metodologia di Analisi Limite implementata in SAV consultare i paragrafi §2 e §3);

- **per SLE, verifica statica allo stato limite di esercizio**, assimilato allo stato limite di danno SLD: metodo dell'Analisi elastica non lineare (§8.4.2 CNR-DT 213). In §3.5.2 CNR-DT 213 si afferma quanto segue: *"Considerato il particolare comportamento del "materiale muratura", come unico Stato Limite di Esercizio si assume l'attingimento in una qualsiasi parte della struttura di una misura di intensità limite ammissibile dello stato tensionale, coniugato con la verifica della ammissibilità di spostamenti e fessurazioni."* L'ammissibilità dello stato tensionale, degli spostamenti e delle fessurazioni viene controllata attraverso la metodologia di verifica descritta in §8.4.2 CNR-DT 213 (per una completa illustrazione della metodologia di Analisi Elastica Lineare implementata in SAV consultare il paragrafo §6).

## 2. COMPORTAMENTO STATICO DELLE STRUTTURE IN MURATURA. TEORIA DI HEYMAN

L'esposizione teorica della metodologia di calcolo implementata in SAV viene preceduta da un inquadramento generale dell'analisi del comportamento statico delle strutture in muratura, consistente in una sintesi dei lavori di J. Heyman, riportata nel paragrafo §2.1.

Come rilevato da J. Heyman, un **modello costituito da blocchi rigidi**, già adottato nelle prime teorie statiche sugli archi che risalgono al XVIII secolo, **appare ancora oggi sufficientemente espressivo e pertanto idoneo per l'analisi di archi in muratura**.

Le teorie, inizialmente formulate alla fine del XVII secolo - rivolte soprattutto alla individuazione dei meccanismi di collasso, gli unici, d'altronde, suscettibili di verifica sperimentale - e quelle successivamente sviluppate per la ricerca della curva delle pressioni<sup>2.1</sup> e della migliore forma da attribuire ad un arco, contenevano già gli elementi essenziali alla descrizione del comportamento degli archi in muratura.

<sup>2.1</sup> Per gli archi in muratura, lo stato di equilibrio interno può essere descritto mediante la curva delle pressioni, ossia la linea lungo cui le forze di compressione si distribuiscono all'interno dell'arco. Questa curva può essere rappresentata anche come un poligono funicolare a tratti lineari: le due rappresentazioni sono equivalenti nel modello a blocchi rigidi e vengono usate indistintamente per determinare la stabilità della struttura.

Queste intuizioni storiche costituiscono il fondamento dell'analisi limite moderna per archi in muratura. In particolare: il concetto di arco come insieme di blocchi rigidi, l'idea di stabilità legata alla possibilità di contenere al proprio interno una linea di pressione e la considerazione dei meccanismi di collasso sono stati formalizzati nei due teoremi fondamentali dell'analisi limite, il Teorema Statico e il Teorema Cinematico. Tali teoremi forniscono oggi gli strumenti rigorosi per determinare quantitativamente il moltiplicatore di collasso e per valutare la sicurezza degli archi sotto carichi statici e sismici.

### 2.1. ANALISI LIMITE PER LE STRUTTURE IN MURATURA

L'Analisi Limite si fonda su due teoremi fondamentali: il **Teorema Statico** e il **Teorema Cinematico**.

#### **Teorema Statico:**

*se esiste almeno uno stato di tensione staticamente ammissibile, globalmente e localmente in equilibrio con il carico applicato e che non violi il criterio di resistenza del materiale, allora la struttura non collassa per tale carico.*

Il moltiplicatore del carico corrispondente (pari ad un'amplificazione del valore di riferimento predefinito per il carico agente) è un **limite inferiore** del moltiplicatore di collasso:

$$\lambda_{\text{statico}} \leq \lambda_{\text{collasso}}$$

Per l'arco in muratura, **nell'ambito del modello di muratura ideale rigido-plastico (Heyman)**, assumendo resistenza a trazione nulla e resistenza a compressione infinita, lo stato di tensione staticamente ammissibile si traduce nel **contenimento della curva delle pressioni all'interno della sagoma dell'arco**.

Per determinare l'effettivo moltiplicatore di collasso occorre considerare anche il **Teorema Cinematico**: *qualunque meccanismo cinematicamente ammissibile fornisce un limite superiore del carico di collasso*. Pertanto:

$$\lambda_{\text{collasso}} \leq \lambda_{\text{cinematico}}$$

Per l'arco, il **meccanismo a quattro cerniere**, con curva delle pressioni tangente alternatamente in estradosso e in intradosso in un numero sufficiente di sezioni da rendere la struttura isostatica, è cinematicamente ammissibile.



Il moltiplicatore di collasso effettivo dell'arco coincide con il **massimo moltiplicatore statico** e con il **minimo moltiplicatore cinematico**. In tal senso, un arco in muratura è stabile finché esiste una curva delle pressioni in equilibrio con i carichi, interamente contenuta nello spessore e tale da non rendere l'arco cinematicamente labile. Il collasso si verifica quando la curva delle pressioni diventa tangente ai bordi in un numero sufficiente di sezioni tale da generare un meccanismo.

In tale configurazione:

$$\lambda_{\text{statico}} = \lambda_{\text{collasso}} = \lambda_{\text{cinematico}}.$$

La ricerca della curva delle pressioni in equilibrio con il carico si fonda su considerazioni di **solo equilibrio** e di **compatibilità con i criteri di resistenza**: non viene considerata la deformazione prodotta dal carico e, quindi, la curva delle pressioni individuata rappresenta **una possibile soluzione statica**, non necessariamente quella reale. Tuttavia, ai fini del Teorema Statico, è sufficiente che **esista** una curva delle pressioni che soddisfi le condizioni di ammissibilità.

Il procedimento analitico descritto, quindi, non mira a definire univocamente la curva delle pressioni reale, per la cui determinazione sarebbero necessarie ulteriori condizioni legate alla deformabilità del materiale. Nello spirito dell'analisi limite, l'obiettivo è determinare il moltiplicatore di collasso sia per accertare la sicurezza della struttura sotto un carico predeterminato (sicurezza corrispondente a  $\lambda_{\text{collasso}} \geq 1$ ) sia per definire il limite massimo di amplificazione del carico di riferimento compatibile con condizioni di sicurezza (valore di  $\lambda_{\text{collasso}}$ ).

Secondo l'approccio teorico sviluppato da Heyman, il comportamento statico degli archi e, più in generale, delle strutture in muratura può essere compreso considerando la geometria della struttura piuttosto che le proprietà meccaniche dei materiali. Seguendo rigorosamente il modello della muratura ideale di Heyman (resistenza a trazione nulla, resistenza a compressione infinita), la stabilità di una struttura in muratura dipende non dalla resistenza dei materiali, ma dalla sua corretta geometria globale, intesa come la possibilità di contenere al proprio interno la curva delle pressioni o il poligono funicolare compatibile con i carichi applicati.

Poiché l'analisi limite fornisce una **soluzione equilibrata e staticamente ammissibile**, è comunque possibile integrare l'analisi strutturale con **verifiche di resistenza del materiale**.

Facendo infatti riferimento alla posizione della curva delle pressioni corrispondente alla soluzione, è possibile determinare lo stato di sollecitazione interno e svolgere verifiche di sicurezza in termini di attrito (taglio tra conci) e di compressione, qualora si desideri introdurre una resistenza a compressione finita. In tal caso, il carico cui corrisponde una soluzione staticamente ammissibile può essere ulteriormente valutato anche in base alla resistenza a taglio e alla resistenza a compressione del materiale, ottenendo eventualmente un valore del moltiplicatore limite inferiore rispetto a quello determinato assumendo la sola stabilità geometrica (resistenza a compressione infinita e indipendenza dalla resistenza a taglio).

Il moltiplicatore limite ottenuto dall'analisi statica ideale può così essere ridotto, assicurando anche il rispetto della resistenza finita del materiale.

## 2.2. INQUADRAMENTO NORMATIVO

L'approccio dell'analisi limite applicato alle strutture in muratura, pur non essendo esplicitamente formulato nei termini dei teoremi statico e cinematico, risulta pienamente coerente con l'impostazione delle Norme Tecniche per le Costruzioni, che ammettono l'utilizzo di modelli di comportamento non lineari per la valutazione degli Stati Limite Ultimi. In particolare, le **NTC consentono l'impiego dell'Analisi Limite** per la verifica agli SLU, riconoscendo la possibilità di **valutare la sicurezza strutturale attraverso il confronto tra le azioni applicate e la capacità resistente associata al collasso** (§2.2.1 NTC).

Nel linguaggio normativo, il moltiplicatore di collasso  $\lambda$  può essere interpretato come il rapporto tra l'azione massima compatibile con l'equilibrio e con i criteri di resistenza del sistema murario e l'azione di progetto definita mediante le combinazioni di carico previste per lo Stato Limite Ultimo (§2.5.3 NTC). La condizione di sicurezza richiesta dalla normativa si traduce pertanto nella verifica che la capacità resistente del sistema o del meccanismo considerato non sia inferiore alla domanda derivante dalle azioni di progetto, condizione che, nel formalismo dell'analisi limite, equivale a richiedere  $\lambda_{\text{collasso}} \geq 1$ .

Per le costruzioni in muratura esistenti, le NTC prevedono esplicitamente la valutazione della sicurezza mediante l'analisi dei **meccanismi di collasso locali**, con particolare riferimento ai cinematismi attivabili sotto l'azione sismica (§8.7.1 NTC). In tale contesto, la descrizione del comportamento strutturale attraverso cinematismi compatibili con il quadro fessurativo atteso risulta pienamente coerente con l'approccio cinematico dell'analisi limite. Il meccanismo a quattro cerniere dell'arco in muratura rappresenta pertanto un meccanismo cinematicamente ammissibile rilevante ai fini della valutazione della sicurezza.

L'introduzione di resistenze a compressione e a taglio finite consente di rendere l'analisi coerente con le prescrizioni normative, che richiedono l'utilizzo di valori di resistenza ottenuti mediante una **valutazione appropriata delle caratteristiche meccaniche dei materiali**, tenendo conto del livello di conoscenza e delle informazioni disponibili. Per le murature esistenti, tali aspetti sono trattati nella Circolare alle NTC, con particolare riferimento alla determinazione delle resistenze da adottare nelle verifiche (§C8.5.3 NTC). **In presenza di azioni sismiche, il moltiplicatore di collasso può infine essere interpretato come il fattore di amplificazione dell'azione orizzontale equivalente che conduce all'attivazione del meccanismo di collasso** considerato, in accordo con l'approccio cinematico adottato per l'analisi dei meccanismi locali nelle costruzioni in muratura, come illustrato nella Circolare alle NTC (§C8.7.1.2.1 NTC).

In sintesi, la metodologia proposta per l'analisi strutturale degli archi in muratura si ancora quindi perfettamente alla Normativa tecnica vigente, con particolare riferimento ai seguenti punti:

§2.2.1 NTC per l'Analisi Limite,

§8.7.1 NTC per i meccanismi locali,

§C8.5.3, §C8.7.1.2.1 NTC per resistenze e cinematismi.

## 2.3. FATTORE GEOMETRICO DI SICUREZZA SECONDO HEYMAN

J. Heyman ha introdotto un indicatore di sicurezza di natura puramente geometrica, legato intrinsecamente alla geometria dell'arco, al quale può essere attribuito il nome di *fattore geometrico di sicurezza*.

Occorre notare, infatti, che l'assunzione secondo cui un arco possa essere considerato stabile o sicuro quando contenga al suo interno un poligono funicolare compatibile con i carichi non fornisce alcuna indicazione quantitativa sul grado effettivo di sicurezza della struttura.

In tal senso, i termini "stabile" o "sicuro" assumono un significato puramente qualitativo e non sono associati a un valore numerico. Per introdurre una misura quantitativa del grado di sicurezza, Heyman propone di definire l'arco di minimo spessore compatibile con il poligono funicolare relativo al sistema dei carichi considerato. Attraverso il rapporto tra lo spessore dell'arco reale e quello dell'arco di minimo spessore è possibile definire il suddetto fattore geometrico di sicurezza.

A tale proposito, occorre osservare che la regola grafica basata sull'assunzione di un fattore geometrico di sicurezza pari a 3, equivalente in pratica alla regola del terzo medio e caratterizzante il noto metodo di Méry (vd. §3.5), ha carattere convenzionale e non deriva da considerazioni generali di sicurezza: tale valore, in generale, può risultare del tutto diverso e, in alcuni casi, anche inferiore.

Si osservi inoltre che **il fattore geometrico di sicurezza definito da Heyman ha un significato concettualmente distinto dal coefficiente di sicurezza inteso come moltiplicatore di collasso determinato mediante l'analisi limite dell'arco.**

Il moltiplicatore di collasso indica di quanto le azioni possono essere amplificate prima che non sia più possibile individuare una soluzione statica ammissibile con curva delle pressioni interamente contenuta nella struttura; attraverso tale moltiplicatore vengono definiti gli indicatori di rischio statico e sismico. Il fattore geometrico di sicurezza secondo Heyman rappresenta invece un indicatore volto a fornire una quantificazione della sicurezza per un valore predeterminato del carico agente (definito in base alle scelte progettuali e ai riferimenti normativi).

Tuttavia, nella maggior parte dei casi pratici, la curva delle pressioni non risulta completamente contenuta all'interno di un arco di spessore inferiore a quello reale: in altri termini, per il sistema di carichi considerato, l'arco di minimo spessore coincide spesso con l'arco reale, nel quale la curva delle pressioni risulta tangente all'intradosso o all'estradosso in uno o più punti.

Ritenendo quindi accettabile la formazione di cerniere fino a tre, la **valutazione della sicurezza** si riconduce alla determinazione del moltiplicatore di collasso, ossia alla **stima di quanto il carico variabile possa essere amplificato prima del raggiungimento della crisi ultima.** È questa, in senso proprio, la verifica di sicurezza fornita dall'analisi limite. Per una data combinazione di carichi, il moltiplicatore di collasso può essere calcolato automaticamente dal procedimento risolutivo, con metodo per tentativi, in riferimento ai carichi affetti da variabilità.

D'altra parte, anche in presenza di carichi eterogenei, fra cui quelli non affetti da variabilità come i permanenti, è possibile definire un coefficiente di sicurezza amplificando i carichi stessi con un fattore moltiplicativo direttamente definito a priori (ad es. 1.5) e controllando se la verifica di sicurezza è soddisfatta: per tentativi è quindi possibile quantificare la sicurezza, in qualsiasi configurazione di carico. Può comunque rimanere interessante evidenziare, ove possibile, l'esistenza di un arco di minimo spessore inferiore a quello dell'arco reale in grado di assicurare stabilità: in tal caso, invece di amplificare i carichi, si può correggere lo spessore dell'arco fino a determinare il valore minimo compatibile con la sicurezza (in un tale approccio occorre fare attenzione a non alterare i carichi originari dovuti ai pesi propri della struttura).

## **2.4. FONDAMENTI DI ANALISI LIMITE PER ARCHI IN MURATURA**

Per l'analisi limite di un arco costituito da conci lapidei lavorati e posti in mutuo contrasto o, addirittura, senza apporto di malta, si adotta un modello discreto per il quale la struttura risulta suddivisa in elementi finiti coincidenti con i conci reali che costituiscono l'arco stesso e viene considerato un comportamento rigido dei conci e un comportamento rigido fessurante dei giunti di collegamento.

Gli algoritmi di analisi e calcolo consentiranno l'estensione a schematizzazioni con conci 'ideali' non coincidenti con i reali, mostrando come la soluzione possa essere sostanzialmente individuata anche in assenza di una mesh molto fitta; in ogni caso, le fessurazioni teoriche e quindi le eventuali cerniere saranno sempre localizzate nelle interfacce fra i conci utilizzati nel modello.

Il **modello**, detto "**a blocchi rigidi**" e proposto da J. Heyman si fonda sulle seguenti ipotesi.

### **(i) La pietra non offre alcuna resistenza a trazione.**

Questa ipotesi risulta certamente verificata per la muratura costituita da blocchi assemblati a secco o con apporto di malta a scarsa resistenza; essa è in ogni caso a favore di sicurezza.

**(ii) La resistenza a compressione della pietra si assume infinita.**

Questa ipotesi trova giustificazione nella constatazione che, salvo eccezioni, il collasso di un arco in muratura di pietra avviene per la formazione di cerniere di apertura tra concio e concio, ossia per rotazione rigida di due conci contigui intorno al lato di contatto in corrispondenza dell'intradosso od estradosso dell'arco, e non per schiacciamento dei conci.

L'ipotesi corrisponde teoricamente ad una tensione di compressione 'infinita' nel punto di contatto tra i conci in corrispondenza della cerniera, ma in realtà è sufficiente un limitato schiacciamento locale per riportare i valori della tensione entro i limiti di rottura dei conci lapidei. L'osservazione sperimentale delle strutture ad arco conferma che la tensione media di compressione risulta essere modesta.

In altre parole, con questa ipotesi si afferma che in generale è la flessione la sollecitazione capace di produrre il collasso della struttura per formazione di un meccanismo.

**(iii) I conci in pietra non possono scorrere l'uno rispetto all'altro.**

In altre parole con ciò si ammette tacitamente che la forza tagliante parallela all'asse non ecceda mai la resistenza di attrito tra concio e concio<sup>2.2</sup>.

<sup>2.2</sup> Le tre ipotesi alla base dello sviluppo analitico proposto da Heyman sono finalizzate allo studio della stabilità della struttura. L'algoritmo numerico implementato in SAV, descritto nel paragrafo §3, implementa le ipotesi di Heyman, introducendo estensioni legate sia ad una pur piccola resistenza a trazione della muratura, sia ad una resistenza a trazione significativa dipendente da eventuali rinforzi. Inoltre, la soluzione in termini di curva delle pressioni viene utilizzata anche per lo svolgimento di verifiche di sicurezza a compressione e a taglio della muratura, seguendo le considerazioni già illustrate nel paragrafo §2.1.

Partendo da queste tre ipotesi, Heyman ha definito le procedure di applicazione dei teoremi dell'analisi limite agli archi in muratura. L'analisi strutturale che ne consegue definisce una metodologia innovativa rispetto all'analisi elastica o elasto-plastica: **la sicurezza della struttura viene indagata in funzione della sua forma, cioè da un punto di vista geometrico piuttosto che in termini di tensione e di deformazione**. In altre parole, la stabilità della struttura è assicurata non dalla sua resistenza, ma dalla corretta rispondenza della sua geometria globale all'andamento della curva delle pressioni che deve sopportare.

Sia dunque dato un arco in muratura, di spessore  $t=2 \cdot h$ . Sia  $R$  la risultante delle forze che si trasmettono attraverso una generica sezione retta  $S$ , coincidente con l'interfaccia fra due conci consecutivi.

Per l'ipotesi secondo la quale i conci non possono scorrere l'uno rispetto all'altro, la componente tagliante  $T$  di  $R$  non influisce sul meccanismo di collasso e lo stato di sollecitazione della struttura può essere descritto, ai fini dell'indagine sulle condizioni limite, da due soli parametri: lo sforzo normale  $N$  ed il momento  $M=N \cdot e$  (fig. 2.4.1).

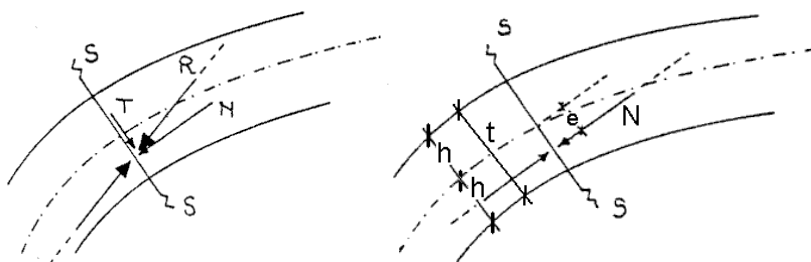


Fig. 2.4.1.

Quando la curva delle pressioni in  $S$  risulta tangente al bordo, si ha:  $e=h$ : in assenza di resistenza a trazione, la curva delle pressioni non può fuoriuscire dalla sagoma dell'arco e tra i due conci contigui all'interfaccia  $S$  si realizzano le condizioni per la formazione di una cerniera (ovviamente la cerniera si attiva, provocando una rotazione rigida, solo al momento dell'insorgenza del cinematismo, quando cioè lungo lo sviluppo dell'arco si sono formate in totale 4 cerniere alternamente disposte tra loro in intradosso e in estradosso).

La condizione per la formazione di una articolazione è quindi:  $M = \pm N \cdot h$  (fig. 2.4.2).

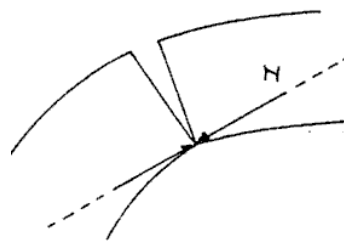


Fig. 2.4.2.

E' dunque possibile costruire la curva limite per gli stati di sollecitazione ammessi: nel sistema di coordinate (N,M) essa è rappresentata dalle rette di equazione  $M = \pm N \cdot h$  (fig. 2.4.3).

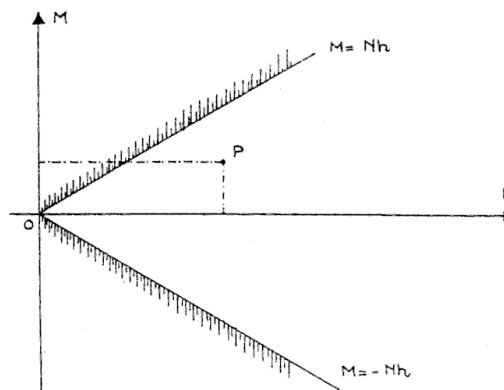


Fig. 2.4.3.

Tutti i punti P di coordinate (N,M) che si trovano all'interno dell'angolo formato dalle due semirette sono rappresentativi di uno stato di sollecitazione accettabile; infatti i due conci risultano ancora in contatto. I punti che si trovano sulle semirette  $M = \pm Nh$  sono invece rappresentativi della condizione per la formazione di una cerniera rispettivamente all'intradosso ed estradosso dell'arco; in questa circostanza la linea delle pressioni passa per il bordo inferiore o superiore del giunto.

Tutti gli altri punti del piano, cioè quelli che si trovano al di fuori dell'angolo formato dalle due semirette, rappresentano stati di sollecitazione non ammissibili: infatti in tal caso la risultante delle forze interne cadrebbe fuori della sezione e ciò non è accettabile per l'ipotesi di non resistenza a trazione del materiale. Se si rimuove l'ipotesi di resistenza infinita alla compressione, cioè se si assegna un materiale con resistenza finita a compressione, la curva limite è rappresentata da due archi di parabola (fig. 2.4.5).

Il calcolo a rottura per materiali non resistenti a trazione, in presenza di contemporanea azione di sforzo normale N e di momento flettente M (riferito al baricentro della sezione completa), si basa su un diagramma  $\sigma - \varepsilon$  in regime monoassiale del tipo della fig. 2.4.4, dove  $\sigma_0$  è la tensione di rottura a compressione, mentre la tensione di rottura a trazione è nulla (gli sforzi di compressione sono considerati positivi).

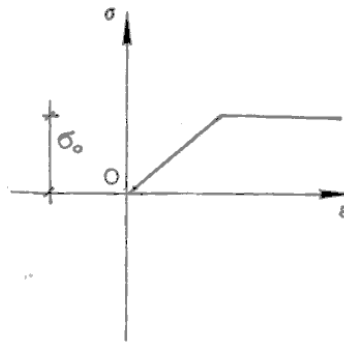


Fig. 2.4.4.

Se la sezione rettangolare ha base  $b$  ed altezza  $t (=2 \cdot h)$ , la curva limite nel dominio  $(N, M)$  è costituita da due archi di parabola. Infatti, per  $\Delta\phi > 0$  (arco superiore di parabola), si ha:

$$N = \sigma_0 \cdot b \cdot \xi \cdot t$$

con  $(\xi \cdot t)$  zona reagente a compressione,

$$M = N \cdot e = N \cdot (t/2 - \xi \cdot t/2) = N \cdot t/2 \cdot (1 - \xi) = \sigma_0 \cdot b \cdot \xi \cdot t^2/2 \cdot (1 - \xi)$$

Poiché lo sforzo normale centrato di rottura vale:  $N_0 = \sigma_0 \cdot b \cdot t$ , si ha:  $\xi = N/N_0$

e quindi:  $M = \sigma_0 \cdot b \cdot t^2/2 \cdot (N/N_0) \cdot (1 - N/N_0)$

ovvero una parabola avente come intersezioni con l'asse delle ascisse  $N$  i punti:  $N=0$  e  $N=N_0$ , come asse verticale la retta  $N=N_0/2 = \sigma_0 \cdot b \cdot t/2$ , e come punto di massimo il punto di coordinate  $(\sigma_0 \cdot b \cdot t/2, \sigma_0 \cdot b \cdot t^2/8)$ .

Si ha:

$$dM/dN = \sigma_0 \cdot b \cdot t^2/(2N_0) \cdot (1 - 2N/N_0) = t/2 \cdot (1 - 2N/N_0) = t/2 \cdot (1 - 2\xi) = t/2 - \xi \cdot t$$

e nell'origine:  $(dM/dN)_{\xi=0} = t/2 = h$

Risulta così individuata la retta tangente all'origine all'arco della parabola (fig. 2.4.5).

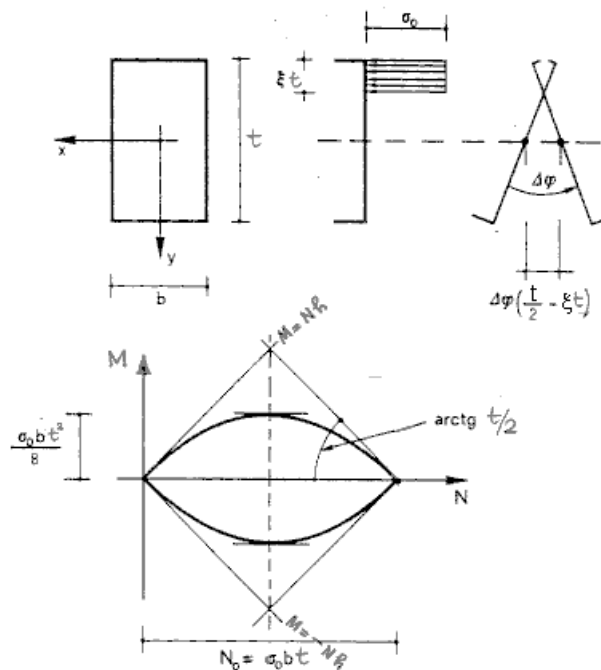


Fig. 2.4.5.

Esaminando molti manufatti lapidei di edifici storici e monumentali, Heyman ha constatato che gli sforzi interni e le dimensioni delle sezioni sono tali da rendere  $\xi$  piccola e questo può autorizzare ad assimilare la curva limite alla bilatera. Ciò corrisponde ad ammettere che la 'cerniera di apertura' si formi in corrispondenza di uno dei bordi estremi della sezione (il superiore se  $\Delta\phi > 0$ , e cioè se  $M > 0$ ).

L'ipotesi (ii) di resistenza teoricamente infinita a compressione corrisponde pertanto a definire il dominio di sollecitazioni ammesse  $(N, M)$  come la regione compresa fra le due rette  $M = \pm N \cdot h$  e le condizioni di ammissibilità sono definite da disequazioni (fig. 2.4.6).

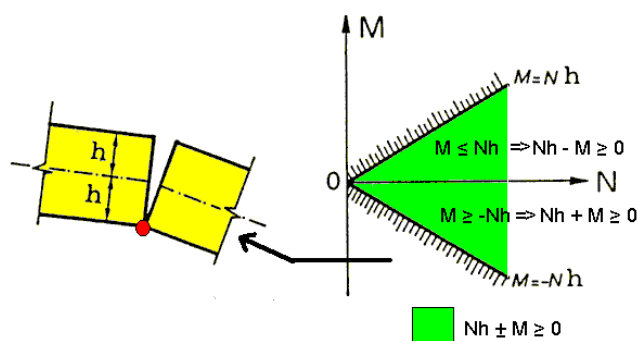


Fig. 2.4.6.

Riassumendo: la regione contenuta tra le due semirette  $M = N \cdot h$  e  $M = -N \cdot h$  determina gli stati ammissibili di sollecitazione per i quali non si verificano rotazioni tra i conci e, di conseguenza, la curva delle pressioni rimane ovunque contenuta nello spessore dell'arco. I punti che giacciono sulle due semirette sono rappresentativi della condizione di formazione di una cerniera all'intradosso o all'estradosso; in tal caso la curva delle pressioni risulta tangente al bordo inferiore o superiore del giunto di interfaccia fra i conci. Per tutti i punti esterni al dominio, si manifestano stati di sollecitazione non ammissibili per i quali la curva delle pressioni cadrebbe fuori dello spessore dell'arco.

### 3. MODELLO MATEMATICO

#### 3.1. FORMULAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA

Si considera un arco incastrato, costituito da  $n$  conci e da  $m=(n+1)$  interfacce, su ciascuna delle quali agiscono le azioni interne  $N$  (sforzo normale),  $M$  (momento flettente) e  $T$  (taglio), per effetto del sistema di carichi applicati (peso proprio, altre azioni esterne) (fig. 3.1.1). L'arco viene discretizzato, numerando i conci e le interfacce progressivamente da sinistra a destra.

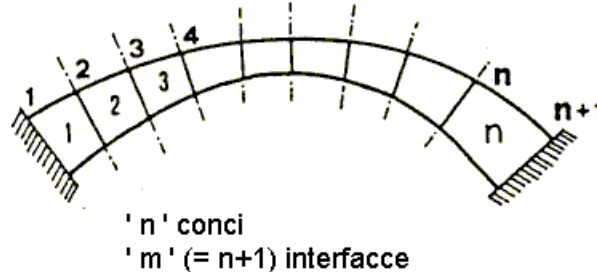


Fig. 3.1.1. Discretizzazione dell'arco in conci (=elementi finiti)

I conci costituiscono gli 'elementi finiti' del modello; l'interfaccia consente la trasmissione degli sforzi da un concio a quello adiacente. Si può fare riferimento ai conci reali, separati da interfacce costituite dai giunti di malta; ma più in generale facciamo riferimento ad una suddivisione matematica dell'arco non necessariamente coincidente con i conci reali (in generale, i metodi numerici garantiscono la validità del calcolo anche con suddivisioni non fitte: questo permette di usare un numero di elementi finiti non eccessivo anche per archi di grandi dimensioni).

Il problema statico è retto dalla seguente formulazione matriciale:

$$\mathbf{A} \mathbf{N} + \mathbf{B} \mathbf{M} + \mathbf{C} \mathbf{T} = \mathbf{F} \quad (1)$$

dove  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sono le matrici di configurazione geometrica relative rispettivamente ai vettori incogniti  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{T}$  (caratteristiche di sollecitazione) e  $\mathbf{F}$  è il vettore dei carichi assegnati, sotto le condizioni:

$$N_i \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_i \cdot h_i - M_i &\geq 0 \\ N_i \cdot h_i + M_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avendo posto l'altezza del concio  $i$ -esimo pari a  $2 \cdot h_i$ .

Le incognite sono le  $3m=3(n+1)=3n+3$  caratteristiche di sollecitazione agenti nelle interfacce, mentre le equazioni (1) sono pari al numero dei conci:  $3n$ .

Il sistema lineare (1) presenta quindi un numero di equazioni insufficienti: ciò è ovvio, dato il grado di indeterminazione del problema, pari a 3 incognite iperstatiche.

Le disequazioni (2) traducono la circostanza che l'interfaccia può trasmettere solo sforzo normale di compressione, mentre le (3) traducono il fatto che il poligono funicolare deve essere contenuto entro la sagoma dell'arco (fig. 2.4.6).

Le infinite soluzioni del sistema (1) vengono quindi ridotte dalle condizioni (2) e (3).

Può anche accadere che non esista una soluzione che soddisfi contemporaneamente le equazioni e le disequazioni: in tal caso, la struttura non può essere in equilibrio sotto l'assegnata condizione di carico, ossia **non esiste un poligono funicolare interno alla sagoma dell'arco in equilibrio con i carichi esterni: l'arco è instabile.**



Per la soluzione del problema, possono essere utilizzate tecniche di programmazione quadratica. Si preferisce tuttavia usare un metodo alternativo, meno dispendioso in termini computazionali, e più direttamente collegato al problema fisico.

Prima di illustrare il procedimento numerico, si reimposta il problema in maniera più vantaggiosa, ridefinendo il vincolo di connessione fra le facce di due conci generici attraverso tre bielle ideali delle quali una tangente e le altre due con direzione ortogonale all'interfaccia rispettivamente nei punti di intradosso e di estradosso (fig. 3.1.2).

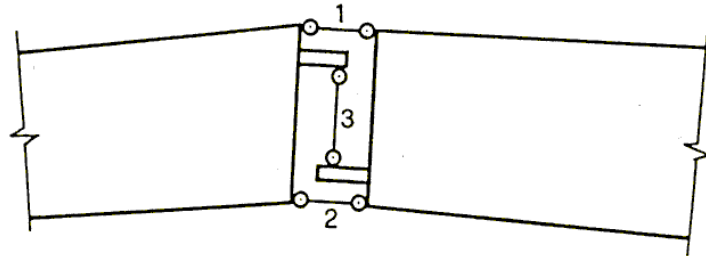


Fig. 3.1.2.

In tal modo, l'arco risulta costituito da blocchi rigidi connessi da tre bielle ideali delle quali due, quelle ortogonali all'interfaccia, a comportamento unilatero, cioè in grado di trasmettere solo sforzi di compressione (comportamento rigido-fessurante), ed è questo il modello adottato in SAV.<sup>3.1</sup>

<sup>3.1</sup> Nell'ambito della modellazione a conci rigidi tra loro collegati con interfaccia organizzata in bielle, sono state messe a punto varianti della modellazione di fig. 3.1.2 ottenute sia utilizzando un numero maggiore di bielle sia concentrando in esse l'elasticità della struttura, al fine di rappresentare le caratteristiche di deformabilità del giunto di malta (modello elastico-fessurante). Per approfondimenti in merito si rinvia alla bibliografia [A.1].

Si consideri il concio  $i$ -esimo, delimitato dalle interfacce  $i$  e  $i+1$ , sottoposto al sistema di azioni indicato in fig. 3.1.3:

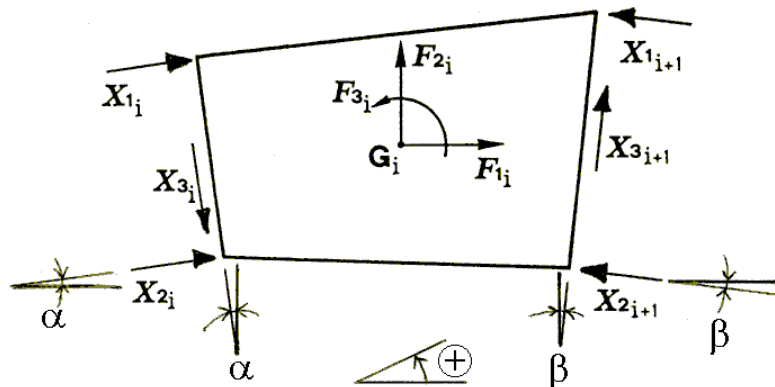


Fig. 3.1.3. Azioni sul concio  $i$ -esimo

Gli sforzi nelle bielle di interfaccia sono i seguenti:

$X_{1i}$  = sforzo nell'interfaccia  $i$  nella biella di estradosso;

$X_{2i}$  = sforzo nella biella di intradosso;

$X_{3i}$  = sforzo nella biella tangente.

Le tre equazioni di equilibrio del concio  $i$ -esimo (interessato dalle interfacce  $i$  e  $i+1$ ) sono le seguenti:

$$\begin{cases} X_{1i} \cos\alpha + X_{2i} \cos\alpha + X_{3i} \sin\alpha - X_{1,i+1} \cos\beta - X_{2,i+1} \cos\beta - X_{3,i+1} \sin\beta + F_{1i} = 0 \\ X_{1i} \sin\alpha + X_{2i} \sin\alpha - X_{3i} \cos\alpha - X_{1,i+1} \sin\beta - X_{2,i+1} \sin\beta + X_{3,i+1} \cos\beta + F_{2i} = 0 \\ -X_{1i} d_{1i} + X_{2i} d_{2i} + X_{3i} d_{3i} + X_{1,i+1} d_{1,i+1} - X_{2,i+1} d_{2,i+1} + X_{3,i+1} d_{3,i+1} + F_{3i} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

dove:

$X_i$  = azioni interne incognite (sforzi nelle bielle), pari a  $3m$  (3 bielle per ognuna delle  $m$  interfacce);

si assume come positivo il verso indicato in fig. 3.1.3 (per le bielle 1 e 2 (fig. 3.1.2):  $X > 0$  se di compressione; per la biella 3 (fig. 3.1.2):  $X > 0$  se corrisponde ad un abbassamento del semiarco di sinistra rispetto a quello di destra (convenzione opposta a quanto usualmente adottato per lo sforzo di taglio);

$F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}$  = carichi esterni agenti sul concio (termini noti);

$d_{ij}$  = distanza della direzione  $j$  (asse della biella) dal baricentro  $G_i$  del concio.

Il sistema lineare (4) può essere riscritto nella forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (5)$$

dove:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha & -\cos\beta & -\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \sin\alpha & -\cos\alpha & -\sin\beta & -\sin\beta & \cos\beta \\ -d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{1,i+1} & -d_{2,i+1} & d_{3,i+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \\ X_{1,i+1} \\ X_{2,i+1} \\ X_{3,i+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1} (\mathbb{R}^6) \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ F_{3i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} (\mathbb{R}^3)$$

con i seguenti significati:

$\mathbf{A}$  = matrice di assetto (o di configurazione geometrica, detta anche: matrice di equilibrio),

$\mathbf{X}$  = vettore incognito degli sforzi nelle bielle,

$\mathbf{F}$  = vettore dei termini noti (carichi assegnati).

$\mathbb{R}^{n \times m}$  è l'insieme delle matrici reali aventi  $n$  righe e  $m$  colonne.

Le espressioni matriciali (6) si riferiscono al concio  $i$ -esimo. Il sistema completo della struttura globale (l'arco costituito da tutti i conci) viene costruito per assemblaggio dei singoli conci, cioè dei gruppi di 3 equazioni. Eseguito l'assemblaggio, risulta:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3n \times 3m}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3m \times 1} (\mathbb{R}^{3m})$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 1} (\mathbb{R}^{3n})$ .

La (5) può anche essere scritta nella forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (7)$$

adottando per i termini noti la convenzione sui segni opposta rispetto a quella di fig. 3.1.3 (in modo, dunque, che il carico verticale  $F_{2i}$  sia positivo se rivolto verso il basso, come il verso del peso proprio).

Poniamo, per semplicità:  $3n \rightarrow n$ ,  $3m \rightarrow m$ , e quindi:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$ .

Il sistema lineare è perciò 'rettangolare', cioè costituito da  $n$  equazioni in  $m$  incognite con  $n < m$  (per l'esattezza:  $n = m - 3$ ). Il rango di  $\mathbf{A}$  vale  $n$ , cioè le righe del sistema sono linearmente indipendenti tra loro.

Se i vincoli fossero tutti bilateri, cioè le bielle 1 e 2 (fig. 3.1.2) fossero in grado di trasmettere sforzi di trazione e di compressione, il sistema presenterebbe  $\infty^{m-n}$  ( $=\infty^3$ ) soluzioni tutte equilibrate (azioni interne in equilibrio con i carichi esterni).

Ma l'unilateralità dei vincoli, corrispondente alla proprietà delle bielle 1 e 2 di reagire solo a compressione, impone la ricerca dell'insieme di soluzioni che soddisfano le equazioni di equilibrio (7) nel rispetto delle condizioni di segno:

$$X_{1i} \geq 0, \quad X_{2i} \geq 0 \quad (8)$$

Nel paragrafo §3.2 viene formulata l'espressione generale delle  $\infty^{m-n}$  soluzioni del sistema rettangolare avente un numero di equazioni inferiore al numero delle incognite; successivamente (paragrafo §3.3) verranno introdotte le condizioni di segno per identificare le soluzioni realmente accettabili (cioè aventi significato fisico) per il problema in esame.

### 3.2. RISOLUZIONE DEL SISTEMA RETTANGOLARE: L'INVERSA GENERALIZZATA

Dato un sistema lineare di  $n$  equazioni tra loro indipendenti in  $n$  incognite:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (9)$$

con:  $\det \mathbf{A} \neq 0$  (equazioni linearmente indipendenti), la soluzione può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (10)$$

dove  $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice univocamente definita, detta matrice 'inversa' di  $\mathbf{A}$ , tale che:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (11)$$

con  $\mathbf{I}$  matrice identità di ordine  $n$ . Pertanto:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \quad (13)$$

Dato un sistema rettangolare di  $n$  equazioni in  $m$  incognite ( $n < m$ ):

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (14)$$

si ricerca l'espressione dell'insieme delle soluzioni. Poiché non è possibile definire una matrice inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ , definiamo "**inversa generalizzata**" di  $\mathbf{A}$  una matrice  $\mathbf{A}^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tale che:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^g \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (15)$$

Si noti l'analogia fra la (15) e la (12). In generale,  $\mathbf{A}^g$  non è univocamente determinata. Si può richiedere all'inversa generalizzata  $\mathbf{A}^g$  di soddisfare l'ulteriore condizione:

$$\mathbf{A}^g \mathbf{A} \mathbf{A}^g = \mathbf{A}^g \quad (16)$$

Si noti l'analogia fra la (16) e la (13). Neppure la condizione (16), tuttavia, garantisce l'unicità di  $\mathbf{A}^g$ .

Dai teoremi dell'algebra lineare, tutte le soluzioni  $\mathbf{X}$  del sistema non omogeneo (14) sono espresse dalla somma di una soluzione particolare  $\mathbf{X}_0$  del sistema non omogeneo con l'insieme di tutte le soluzioni  $\mathbf{X}_N$  del sistema omogeneo associato ( $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$ ):

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_N \quad (17)$$

L'espressione di  $\mathbf{X}_N$  è facilmente determinabile utilizzando la definizione (15) dell'inversa generalizzata. Se  $\mathbf{A}^g$  è un'inversa generalizzata di  $\mathbf{A}$ , allora il nucleo di  $\mathbf{A}$ :  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ , cioè l'insieme dei vettori  $\mathbf{X}$  tali che:  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$  (insieme delle soluzioni del sistema omogeneo), è esprimibile con la seguente relazione:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^g \mathbf{A}) \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^m \} \quad (18)$$

essendo  $\mathbf{I}$  la matrice identità di ordine  $m$ . Infatti, posto:

$$\mathbf{X}_N = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^g \mathbf{A}) \mathbf{M} \quad (19)$$

si ha:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_N = \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^g \mathbf{A}) \mathbf{M} = (\mathbf{A} \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^g \mathbf{A}) \mathbf{M} \quad (20)$$

Poiché:  $\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}$  e  $\mathbf{A} \mathbf{A}^g \mathbf{A} = \mathbf{A}$  per definizione (vd. (15)), si ha:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_N = (\mathbf{A} - \mathbf{A}) \mathbf{M} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Pertanto  $\mathbf{X}_N$  definito dalla (19) è tale che:  $\mathbf{A} \mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ , come volevasi dimostrare. Si ricorda che l'insieme delle soluzioni dei sistemi omogenei contiene sempre la soluzione nulla, ma in generale anche altre soluzioni: per quanto osservato, l'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$  è espresso dalla (18). Per quanto riguarda la soluzione particolare  $\mathbf{X}_0$  del sistema non omogeneo  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}$ , se l'inversa generalizzata rispetta la condizione (16), questa può avere la seguente espressione:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^g \mathbf{F} \quad (22)$$

Infatti, affinché  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^g \mathbf{F}$  sia una soluzione particolare del sistema non omogeneo  $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}$ , occorre che:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^g \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \quad (23)$$

Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per  $\mathbf{A}^g$  si ottiene:

$$\mathbf{A}^g \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^g \mathbf{F} \equiv \mathbf{A}^g \mathbf{F} \quad (24)$$

identità soddisfatta grazie all'ipotesi di validità della (16).

In definitiva, possiamo affermare che se  $\mathbf{A}^g$  è un'inversa generalizzata di  $\mathbf{A}$  soddisfacente le due condizioni (15) e (16), tutte le soluzioni del sistema non omogeneo (14) sono espresse da:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^g \mathbf{F} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^g \mathbf{A}) \mathbf{M}, \quad \forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^m \quad (25)$$

Poiché  $\mathbf{A}^g$  non è unica, è possibile sceglierla secondo un determinato criterio. Per esempio, sarà possibile riferirsi alla matrice tale da fornire la soluzione  $\mathbf{X}$  di minima norma euclidea; la norma euclidea in  $\mathbb{R}^m$  è definita dalla seguente espressione:

$$N_2(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_2 = \left( \sum_{j=1, \dots, m} |x_j|^2 \right)^{1/2} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{1/2} \quad (26)$$

(in algebra matriciale, il simbolo  $^T$  indica la trasposizione, ossia la matrice ottenuta dallo scambio delle righe con le colonne). La matrice inversa generalizzata  $A^g$  tale da fornire la soluzione  $X$  di minima norma euclidea è detta "**pseudoinversa**" di  $A$ , e si può dimostrare che è data dalla seguente espressione:

$$A^g = A^T (A A^T)^{-1} \quad (27)$$

ed è unica; la matrice  $(A A^T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è invertibile in quanto simmetrica e definita positiva.

Come si potrebbe facilmente dimostrare, essa soddisfa le condizioni (15) e (16); fra l'altro, è anche tale che:

$$\begin{aligned} (A A^g)^T &= A A^g \\ (A^g A)^T &= A^g A \end{aligned} \quad (28)$$

Adottando quindi la matrice pseudoinversa, tutte le soluzioni (17) del sistema  $A X = F$  assumono la forma:

$$X = X_0 + X_N = A^T (A A^T)^{-1} F + (I - A^T (A A^T)^{-1} A) M, \quad \forall M \in \mathbb{R}^m \quad (29)$$

( $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n < m$ ), dove: dalla (22):  $X_0 = A^g F$  e dalla (19):  $X_N = (I - A^g A) M$ .

Si definisce la matrice  $C$ :

$$C = I - A^T (A A^T)^{-1} A, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (30)$$

$C$  è la matrice di proiezione ortogonale dallo spazio  $\mathbb{R}^{m \times m}$  nel nucleo di  $A$ :  $\mathcal{N}(A)$ ; per definizione, infatti:

$$X_N = C M \quad (31)$$

$C$  gode di alcune interessanti proprietà; tra le altre:

- ha rango:  $r=(m-n)$  ( $=3$  nel problema statico esaminato);
- è semidefinita positiva, cioè:  $Y^T C Y \geq 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^m$ ;
- il suo determinante è nullo:  $\det C = 0$ , cioè si tratta di una matrice singolare.

La (29) assume la forma:

$$X = X_0 + C M, \quad \forall M \in \mathbb{R}^m \quad (32)$$

### 3.3. INTRODUZIONE DELLE CONDIZIONI DI SEGNO

Nell'espressione (32) che fornisce tutte le soluzioni del sistema  $A X = F$  è presente l'arbitrarietà del vettore  $M$ . Dato che il sistema rettangolare (7) corrispondente al problema fisico esaminato presenta condizioni di segno, l'arbitrarietà di  $M$  può essere utilizzata per soddisfare le disequazioni (8) (si osservi dalla (29) che la soluzione particolare del sistema non omogeneo  $X_0$  è invece indipendente dalle condizioni di segno).

Esplicitando le componenti dei vettori, si ha:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0j} \\ \dots \\ x_{0m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j1} & \dots & c_{jj} & \dots & c_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_j \\ \dots \\ m_m \end{pmatrix} \quad (33)$$

La soluzione del problema statico di stabilità dell'arco può essere individuata attraverso un procedimento iterativo sul vettore  $\mathbf{M}$  che conduce alla determinazione, se esiste, del vettore  $\mathbf{X}$  degli sforzi corrispondente ad una curva delle pressioni compatibile con i carichi esterni (equazioni di equilibrio) e con la forma geometrica dell'arco (condizioni di segno).

Al passo <sup>(1)</sup> iniziale del procedimento iterativo si assume:  $\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{0}$ , cioè:

$$m_i^{(0)} = 0 \quad \forall i (i = 1, \dots, m) \quad (34)$$

Pertanto:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}_0 \quad (35)$$

Se risulta:  $\mathbf{X}^{(1)} \geq \mathbf{0}$ , cioè tutte le componenti del vettore  $\mathbf{X}^{(1)}$  risultano non negative in ogni sua componente, il problema è già risolto<sup>3,2</sup>: fra tutte le configurazioni di equilibrio ne è stata individuata una compatibile con la sagoma dell'arco. Il teorema statico dell'analisi limite ci permette di affermare che l'arco è stabile. Determinato  $\mathbf{X}$ , è possibile tracciare la curva delle pressioni, calcolare le azioni interne e determinare le reazioni alle imposte.

Diversamente, una o più componenti di  $\mathbf{X}^{(1)}$  risultano  $<0$ : se corrispondono a bielle di intradosso o di estradosso (le bielle 1 e 2 in fig. 3.1.2), tali componenti negative indicano bielle tese, ossia soggette ad uno sforzo inaccettabile. Tali sforzi di trazione devono essere "compensati" con iterazioni successive, in modo da individuare, se esiste, una soluzione tale che risulti  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$  in ogni sua componente relativa alle bielle di intradosso o di estradosso (nel seguito, l'operazione di compensazione si intende sempre riferita alle bielle di intradosso o di estradosso).

<sup>3,2</sup> Come evidenziato nel seguito, una componente nulla corrispondente allo sforzo in una biella di intradosso o estradosso significa formazione di una cerniera e il numero totale di cerniere non può essere superiore a 3, pena l'attivazione di un cinematismo: pertanto l'affermazione che il problema è risolto deve ovviamente riferirsi ad un numero di cerniere non superiore a 3.

Al passo <sup>(2)</sup> il metodo iterativo si propone, fra tutte le componenti negative di  $\mathbf{X}^{(1)}$ , la compensazione della biella più tesa, cioè della componente negativa di  $\mathbf{X}_0$  avente massimo valore assoluto. Per fissare le idee, si indichi con  $s'$  tale componente.

Si procede nel seguente modo:

- si estrae da  $\mathbf{X}_0$  il sottovettore di ordine "1":  $\mathbf{X}_0^{(1)}$ , costituito dalla componente  $s'$
- si estrae da  $\mathbf{C}$  la sottomatrice  $\mathbf{C}^{(1)}$  di dimensioni  $1 \times 1$ , costituita dalla componente  $C_{s's'}$
- si determina il vettore di compensazione, di ordine 1, dato da:

$$\mathbf{M}^{(1)} = -\mathbf{C}^{(1)-1} \mathbf{X}_0^{(1)} \quad (36)$$

- si riconfigura il vettore  $\mathbf{M}$  attraverso il valore di  $\mathbf{M}^{(1)}$ , determinando il nuovo vettore soluzione:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{C} \mathbf{M}^{(1)} \quad (37)$$

Al passo <sup>(2)</sup> la componente  $s'$  di  $\mathbf{M}^{(1)}$  è stata compensata e risulta annullata.

Per comprendere meglio il procedimento, esso può essere visualizzato in modo esplicito. Nella formulazione (33) si evidenzia la componente  $s'$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{s'} \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0s'} \\ \dots \\ x_{0m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s'} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s'1} & \dots & c_{s's'} & \dots & c_{s'm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{ms'} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_{s'} \\ \dots \\ m_m \end{pmatrix} \quad (38)$$

Fra tutte le componenti negative di  $\mathbf{X}_0$ , la maggiore in valore assoluto è  $x_{0s'}$ . In base alla (36) si pone:

$$m_{s'} = \frac{-1}{c_{s's'}} \cdot x_{0s'} \quad (39)$$

Sviluppando l'equazione della riga  $s'$  del sistema (38) si ha:

$$x_{s'} = x_{0s'} + \sum_{j=1, \dots, m} (c_{s'j} \cdot m_j) \quad (40)$$

Nella (40) tutte le  $m_j$  al passo <sup>(1)</sup> sono nulle eccetto  $m_{s'}$ , il cui valore è fornito dalla (39). Pertanto:

$$x_{s'} = x_{0s'} + c_{s's'} \cdot m_{s'} = x_{0s'} + c_{s's'} \cdot \left( \frac{-1}{c_{s's'}} \cdot x_{0s'} \right) = 0 \quad (41)$$

ossia si ottiene l'annullamento della componente  $s'$  del vettore soluzione  $\mathbf{X}$ : in tal modo è stato compensato lo sforzo negativo inaccettabile annullandolo.

Tornando alla (37), se a questo punto  $\mathbf{X}^{(2)}$  denuncia ancora componenti negative, occorre aumentare di 1 l'ordine del sottovettore, che quindi diventa 2 al passo <sup>(3)</sup>, e ripetere il procedimento che stavolta interesserà la componente  $s'$  individuata al passo precedente e la componente  $s''$  scelta ancora come la più negativa fra tutte quelle minori di 0.

Esplicitando quindi l'iterazione:

- si estrae da  $\mathbf{X}_0$  il sottovettore di ordine "2":  $\mathbf{X}_0^{(2)}$ , costituito dalle componenti  $s'$  e  $s''$
- si estrae da  $\mathbf{C}$  la sottomatrice  $\mathbf{C}^{(2)}$  di dimensioni 2x2, costituita dalle componenti  $c_{s's'}$  e  $c_{s''s'}$
- si determina il vettore di compensazione, di ordine 2, dato da:

$$\mathbf{M}^{(2)} = -\mathbf{C}^{(2)-1} \mathbf{X}_0^{(2)} \quad (42)$$

- si riconfigura il vettore  $\mathbf{M}$  attraverso il valore di  $\mathbf{M}^{(2)}$ , determinando il nuovo vettore soluzione:

$$\mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{C} \mathbf{M}^{(2)} \quad (43)$$

In generale, al passo  $i$ -esimo del procedimento iterativo:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{C} \mathbf{M}^{(i-1)} \quad (44)$$

e le uniche componenti di  $\mathbf{M}^{(i-1)}$  diverse da zero corrispondono alle componenti  $s', s'', \dots, s^{(i-1)}$  di compensazione. La soluzione al passo <sup>(i)</sup> è quindi ottenuta attraverso la compensazione di  $(i-1)$  componenti.

Il procedimento è rapido, perché si svolge con un numero di passi preciso: essi al massimo possono essere 4 (passo iniziale + 3 iterazioni). Al passo <sup>(4)</sup>, infatti, le componenti compensate sono 3, e corrispondono all'annullamento di tre sforzi normali in tre bielle.

Poiché l'annullamento dello sforzo in una biella corrisponde alla formazione di una cerniera all'intradosso o all'estradosso (a seconda, rispettivamente, che si tratti di  $X_{2i}$  o  $X_{1i}$ , vd. fig. 3.1.3), il numero delle cerniere non può essere maggiore di 3 perché l'arco si trasformerebbe in una struttura labile.

Generalizzando il metodo alla soluzione di strutture generiche a vincoli unilaterali, ciò significa che il numero delle iterazioni non può superare il grado di iperstaticità della struttura.

Nel caso dell'arco, dunque, dopo il passo <sup>(1)</sup> iniziale con la soluzione  $X_0$  di primo tentativo, possono esserci al massimo 3 iterazioni. Se il procedimento è convergente, ossia ha termine all'iterazione  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ), la curva delle pressioni, ottenuta attraverso il vettore soluzione degli sforzi nelle bielle, sarà tangente in  $k$  interfacce, all'intradosso o all'estradosso, evidenziando in tali interfacce la formazione di  $k$  cerniere.

Se invece il procedimento non converge, ossia, eseguita la terza iterazione, continua a manifestarsi almeno un valore negativo tra gli sforzi nelle bielle, l'arco è instabile: non esiste quindi alcun poligono funicolare compatibile con i carichi applicati e con la sagoma dell'arco in condizioni di equilibrio.

### 3.4. ESEMPIO APPLICATIVO

Come nella generalità dei metodi agli elementi finiti, la metodologia proposta per lo studio statico delle strutture ad arco risulta molto complessa e praticamente proibitiva per un calcolo manuale.

Il procedimento descritto è però particolarmente idoneo per l'implementazione su computer. La funzione del software SAV è quella di risolvere anche i casi più complessi in modo rapido e interattivo.

E' tuttavia utile fare riferimento ad un esempio molto semplice per seguire passo-passo l'elaborazione di calcolo e comprendere in dettaglio le modalità applicative della procedura illustrata ai paragrafi precedenti.

Si consideri l'arco a tutto sesto di fig. 3.4.1. Esso costituisce la sezione trasversale di una volta a botte ad ampio sviluppo; si fa riferimento ad una striscia di profondità pari a 1.00 m.

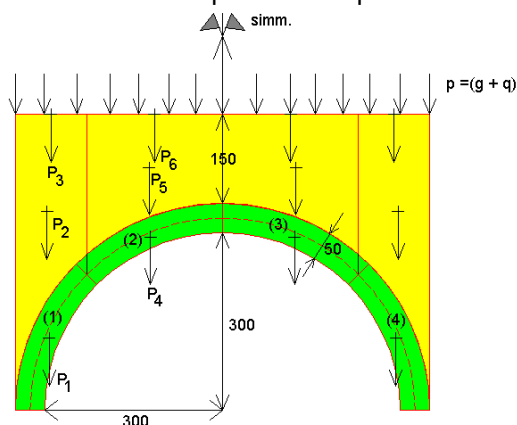


Fig. 3.4.1. Arco a tutto sesto dell'esempio di calcolo

Oltre al peso proprio, l'arco sostiene una sovrastruttura e sull'orizzontamento è applicato un carico distribuito, di cui vengono considerate le due parti permanente e variabile. Lo spessore dell'arco è di 50 cm. Per semplicità di calcolo, si suddivide l'arco in soli 4 conci: ovviamente, modellando un numero di conci coincidente con quello reale, le sollecitazioni alle interfacce coinciderebbero con quelle sui giunti reali<sup>3.3</sup>.

<sup>3.3</sup> Il metodo numerico applicato è sostanzialmente stabile ed in generale anche con un numero ridotto di conci riesce a cogliere la soluzione del problema statico. L'analisi fornirà l'informazione fondamentale sulla stabilità dell'arco, nonché le azioni interne in corrispondenza delle interfacce e conseguentemente la curva delle pressioni.

Il peso specifico della muratura dell'arco è pari a 20 kN/m<sup>3</sup>, quello del riempimento è di 11.00 kN/m<sup>3</sup>. Il



carico di solaio è pari a:  $g$  (perm.)=1.50 kN/m<sup>2</sup>,  $q$  (var.)=4.00 kN/m<sup>2</sup>. Essendo la struttura simmetrica caricata simmetricamente, i conci (3) e (4) sono caratterizzati dagli stessi parametri dei conci (1) e (2). Per ricavare facilmente aree e baricentri, l'arco è stato disegnato in CAD.

#### Concio 1:

Aree di carico x 1.00 m. di profondità:

$$A_1 = 1.2763 \text{ m}^3, A_2 = 3.8090 \text{ m}^3, A_3 = 1.2019 \text{ m}^2$$

Carichi agenti:

$$P_1 \text{ (peso proprio concio)} = 25.53 \text{ kN}, P_2 \text{ (riempimento)} = 41.90 \text{ kN}, P_3 \text{ (solaio)} = 6.61 \text{ kN}$$

Posizione dei baricentri (l'origine è assunta nel centro del cerchio d'arco, l'asse X è positivo verso destra e l'asse Y è positivo verso il basso) (m):

$$G_1 = (-2.9318, 1.2144), G_2 = (-2.9639, 3.3565), G_3 = (-2.8990, 5.000)$$

#### Concio 2:

Aree di carico x 1.00 m. di profondità:

$$A_1 = 1.2763 \text{ m}^3, A_2 = 4.0698 \text{ m}^3, A_3 = 2.2981 \text{ m}^2$$

Carichi agenti:

$$P_1 \text{ (peso proprio concio)} = 25.53 \text{ kN}, P_2 \text{ (riempimento)} = 44.77 \text{ kN}, P_3 \text{ (solaio)} = 12.64 \text{ kN}$$

Posizione dei baricentri (m):

$$G_1 = (-1.2144, 2.9318), G_2 = (-1.2393, 4.0968), G_3 = (-1.1490, 5.000)$$

Componendo per ogni concio le forze agenti, si ha ( $P$  = forza verticale diretta verso il basso, positiva;  $M_P$  = momento prodotto dall'eccentricità di  $P$  rispetto al baricentro del concio, positivo se orario):

$$\text{Concio 1: } P = 74.04 \text{ kN}, M_P = -1.13 \text{ kNm}$$

$$\text{Concio 2: } P = 82.94 \text{ kN}, M_P = -0.29 \text{ kNm}$$

Si costruisce la matrice di equilibrio  $A$ :

COLONNE INTERFACCIA 1			INTERF. 2			INTERF. 3			INTERF. 4			INTERF. 5				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
CONCRO 1	cos $\alpha$ 0	cos $\alpha$ 0	sen $\alpha$ 1	-cos $\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-cos $\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-sen $\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$										CONCRO 1: $\alpha = 90$ $\beta = 45$
	sen $\alpha$ 1	sen $\alpha$ 1	-cos $\alpha$ 0	-sen $\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-sen $\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	cos $\beta$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$										
	-d <sub>1i</sub> 0.5682	d <sub>2i</sub> -0.0682	d <sub>i</sub> 1.2144	d <sub>1im</sub> 0.5682	-d <sub>2im</sub> 0.0682	d <sub>im</sub> 1.2144										
CONCRO 2				$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	0							CONCRO 2: $\alpha = 45$ $\beta = 0$
				$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1							
				-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144							
CONCRO 3							1	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$				CONCRO 3: $\alpha = 0$ $\beta = -45$
							0	0	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$				
							-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144				
CONCRO 4		$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$								$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1	CONCRO 4: $\alpha = -45$ $\beta = -90$
										$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	0	
										-0.5682	-0.0682	1.2144	0.5682	0.0682	1.2144	

Il problema statico è retto dall'equazione:  $A X = F$ , ossia:

$$A = A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 74.04 \\ -1.13 \\ 0 \\ 82.94 \\ -0.29 \\ 0 \\ 82.94 \\ 0.29 \\ 0 \\ 74.04 \\ 1.13 \end{pmatrix}$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{n \times m} = \mathbb{R}^{12 \times 15}$ . I passi da seguire sono: costruzione di  $A^T$ , matrice  $m \times n = 15 \times 12$ ; costruzione di  $(A A^T)$  matrice  $n \times n = 12 \times 12$ , simmetrica e definita positiva; inversione di  $(A A^T)$ : ossia, calcolo di  $(A A^T)^{-1}$  (matrice  $n \times n$ ); calcolo di:  $A^g = A^T (A A^T)^{-1}$  (matrice  $m \times n$ ); calcolo di:  $X_0 = A^g F$ , soluzione di primo tentativo: se  $X_0$  è caratterizzato da  $x_{1i} \geq 0$ ,  $x_{2i} \geq 0$  per tutte le componenti ( $i=1, \dots, 4$ ), allora l'arco è stabile; altrimenti, si innesca il procedimento iterativo. Questi passi sono riportati qui di seguito.

Matrice  $A^T$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	-0.5682	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-0.0682	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1.2144	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-0.707	-0.707	0.5682	0.707	0.707	-0.5682	0	0	0	0	0	0
5	-0.707	-0.707	0.0682	0.707	0.707	-0.0682	0	0	0	0	0	0
6	-0.707	0.707	1.2144	0.707	-0.707	1.2144	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	-1	0	0.5682	1	0	-0.5682	0	0	0
8	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>0.0682</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>-0.0682</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
9	0	0	0	0	1	1.2144	0	-1	1.2144	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	-0.707	0.707	0.5682	0.707	-0.707	-0.5682
11	0	0	0	0	0	0	-0.707	0.707	0.0682	0.707	-0.707	-0.0682
12	0	0	0	0	0	0	0.707	0.707	1.2144	-0.707	-0.707	1.2144
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.5682
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.0682
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1.2144

(in evidenza: l'ottava colonna di  $A$  = ottava riga di  $A^T$ )

Matrice  $A A^T$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.4995	0.4998	-0.0941	-1.4995	-0.4998	-0.4086	0	0	0	0	0	0
2	0.4998	3.4995	-0.2278	-0.4998	-1.4995	1.3085	0	0	0	0	0	0
3	-0.0941	-0.2278	3.6045	1.3085	-0.4086	1.1473	0	0	0	0	0	0
4	-1.4995	-0.4998	1.3085	3.4995	0.4998	-0.2278	-2	0	0.6364	0	0	0
5	-0.4998	-1.4995	-0.4086	0.4998	2.4995	-0.0941	0	-1	1.2144	0	0	0
6	-0.4086	1.3085	1.1473	-0.2278	-0.0941	3.6045	0.6364	-1.2144	1.1473	0	0	0
7	0	0	0	-2	0	0.6364	3.4995	-0.4998	-0.2278	-1.4995	0.4998	1.3085
8	0	0	0	0	-1	-1.2144	-0.4998	2.4995	0.0941	0.4998	-1.4995	0.4086
9	0	0	0	0.6364	1.2144	1.1473	-0.2278	0.0941	3.6045	-0.4086	-1.3085	1.1473
10	0	0	0	0	0	0	-1.4995	0.4998	-0.4086	2.4995	-0.4998	-0.0941
11	0	0	0	0	0	0	0.4998	-1.4995	-1.3085	-0.4998	3.4995	0.2278
12	0	0	0	0	0	0	1.3085	0.4086	1.1473	-0.0941	0.2278	3.6045

Matrice inversa:  $(A A^T)^{-1}$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3.0169	-0.524	-1.84	4.1265	-0.363	1.0899	3.7027	1.2065	0.1009	2.0229	0.4115	-1.486
2	-0.524	0.6343	0.4758	-0.77	0.5194	-0.348	-0.676	-0.103	-0.136	-0.412	-0.077	0.2947
3	-1.84	0.4758	1.6542	-2.96	0.5139	-0.823	-2.664	-0.778	-0.157	-1.486	-0.295	1.0851
4	4.1265	-0.77	-2.96	6.8547	-1.166	1.2515	6.434	1.504	0.6645	3.7027	0.6761	-2.664
5	-0.363	0.5194	0.5139	-1.166	1.7657	0.4171	-1.504	0.7001	-1.057	-1.207	-0.103	0.7781
6	1.0899	-0.348	-0.823	1.2515	0.4171	1.3279	0.6645	1.0571	-0.659	0.1009	0.1364	-0.157
7	3.7027	-0.676	-2.664	6.434	-1.504	0.6645	6.8547	1.1657	1.2515	4.1265	0.7704	-2.96
8	1.2065	-0.103	-0.778	1.504	0.7001	1.0571	1.1657	1.7657	-0.417	0.3625	0.5194	-0.514
9	0.1009	-0.136	-0.157	0.6645	-1.057	-0.659	1.2515	-0.417	1.3279	1.0899	0.3483	-0.823
10	2.0229	-0.412	-1.486	3.7027	-1.207	0.1009	4.1265	0.3625	1.0899	3.0169	0.5242	-1.84
11	0.4115	-0.077	-0.295	0.6761	-0.103	0.1364	0.7704	0.5194	0.3483	0.5242	0.6343	-0.476
12	-1.486	0.2947	1.0851	-2.664	0.7781	-0.157	-2.96	-0.514	-0.823	-1.84	-0.476	1.6542

Matrice pseudoinversa:  $A^g = A^T (A A^T)^{-1}$ : (in evidenza: l'ottava riga di  $A^g$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.5215	0.364	-0.464	0.9114	0.2273	0.1195	0.8374	0.3387	-0.047	0.433	0.0907	-0.322
2	-0.399	0.6019	0.363	-0.569	0.4843	-0.292	-0.495	-0.05	-0.126	-0.31	-0.057	0.2207
3	0.782	0.0536	0.1685	0.5321	0.2616	0.0902	0.4679	0.2616	-0.09	0.218	0.0536	-0.169
4	-0.766	0.2129	0.6432	-0.743	0.3683	-0.567	-0.545	-0.264	0.0323	-0.276	-0.077	0.2153
5	0.6989	-0.199	-0.596	1.3622	0.3199	0.5086	1.1188	0.6532	-0.218	0.5173	0.1388	-0.406
6	-0.241	0.0621	0.1907	0.1338	-0.318	0.1859	0.0884	-0.019	0.0583	0.0673	0.0138	-0.048
7	0.1382	-0.026	-0.082	-0.087	0.4993	0.5418	0.0872	0.4993	-0.542	-0.138	-0.026	0.0822
8	<b>-0.356</b>	<b>0.0798</b>	<b>0.2507</b>	<b>-0.381</b>	<b>-0.238</b>	<b>-0.452</b>	<b>0.3807</b>	<b>-0.238</b>	<b>0.4515</b>	<b>0.3563</b>	<b>0.0798</b>	<b>-0.251</b>
9	-0.123	0.0341	0.1012	-0.343	0.2883	0.1727	-0.343	-0.288	0.1727	-0.123	-0.034	0.1012
10	0.2762	-0.077	-0.215	0.5453	-0.264	-0.032	0.7434	0.3683	0.5669	0.7662	0.2129	-0.643
11	-0.517	0.1388	0.406	-1.119	0.6532	0.2183	-1.362	0.3199	-0.509	-0.699	-0.199	0.5955
12	0.0673	-0.014	-0.048	0.0884	0.0189	0.0583	0.1338	0.3183	0.1859	-0.241	-0.062	0.1907
13	-0.433	0.0907	0.3219	-0.837	0.3387	0.047	-0.911	0.2273	-0.12	-0.522	0.364	0.4641
14	0.3101	-0.057	-0.221	0.4945	-0.05	0.1257	0.5685	0.4843	0.2921	0.3987	0.6019	-0.363
15	0.218	-0.054	-0.169	0.4679	-0.262	-0.09	0.5321	-0.262	0.0902	0.782	-0.054	0.1685

$X_0 = A^g F$ : soluzione di primo tentativo (i1=interfaccia 1; i2=interfaccia 2, ecc.; x1=sforzo nella biella 1, x2=nella 2, x3=nella 3). In evidenza, la componente 8: **i3,x2**=sforzo normale di trazione all'intradosso in chiave.

80.73	i1, x1
76.25	i1, x2
50.90	i1, x3
18.40	i2, x1
76.25	i2, x2
-22.66	i2, x3
78.83	i3, x1
<b>-27.93</b>	<b>i3, x2</b>
0.00	i3, x3
18.40	i4, x1
76.25	i4, x2
22.66	i4, x3
80.73	i5, x1
76.25	i5, x2
-50.90	i5, x3

La componente 8 di  $X_0$  risulta negativa e pari a -27.93. Con riferimento alle espressioni (38) (39), si ha:

$$m_8 = \frac{-1}{c_{88}} \cdot x_{08}$$

dove:

$$c_{88} = i_{88} - \sum_{j=1, \dots, n} a_{8j}^g \cdot \sum_{i=1, \dots, n} a_{i8} \quad (8^a \text{ riga di } A^g \times 8^a \text{ colonna di } A) = 1 - 0.6998 = 0.3002$$

e quindi:

$$m_8 = -1 / 0.3002 \cdot (-27.93) = 93.04$$

$X = X_0 + C M$ , ossia:

$x_1 = x_{01} + c_{18} \cdot m_8$  (tutte le altre componenti  $m_j$  sono nulle). Si ha:

$$c_{18} = i_{18} - \sum_{j=1, \dots, n} a_{1j}^g \cdot \sum_{i=1, \dots, n} a_{i8} = 0 - (-0.0626) = 0.0626$$

e quindi:

$$x_1 = 80.73 + 0.0626 \cdot 93.04 = 86.55$$

e analogamente si calcolano tutte le altre componenti di  $\mathbf{X}$ . In particolare, risulterà annullata  $x_8$ : ciò significa che all'intradosso in chiave si ha la formazione di una cerniera. Il procedimento è convergente. L'arco è stabile: il sistema è in equilibrio sotto i carichi applicati, e conserva due gradi di iperstaticità.

### 3.5. CONFRONTO CON IL METODO DI MÉRY

Fra i metodi disponibili per la risoluzione grafica della statica dell'arco, ancor oggi molto utilizzato è il metodo di Méry. Sull'argomento, un'ampia trattazione con esempi di applicazione si trova in [B.4]. Per ipotesi, questo metodo è applicabile solo a strutture simmetriche caricate simmetricamente: già questa notevole limitazione giustifica l'interesse verso metodologie di nuova generazione in grado di analizzare strutture generiche.

Ma i limiti del metodo di Méry riguardano in realtà la sua stessa impostazione. La teoria di Méry prevede che la curva delle pressioni sia contenuta entro il terzo medio dell'arco, passando per il suo estremo superiore alla chiave e per il suo estremo inferiore al giunto di rottura. Essa è quindi una curva limite, corrispondente allo stato in cui l'arco è sul punto di aprirsi nelle sezioni critiche per l'insorgere degli sforzi di trazione tali da superare l'aderenza della malta (fig. 3.5.1).

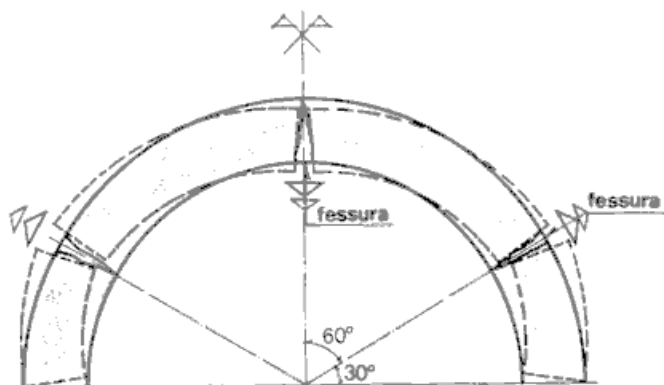


Fig. 3.5.1. Lesioni per un arco a tutto sesto

Questo metodo solo superficialmente assomiglia al metodo dell'analisi limite: costringendo la curva delle pressioni nella striscia del terzo medio, appare oltretutto a favore di sicurezza.

In realtà, il metodo di Méry ipotizza per lo stato tensionale un diagramma triangolare, presupponendo la formazione della cerniera perché la tensione normale al bordo sta per entrare in trazione (fig. 3.4.1.2). Questa è una illecita unione di formule di verifica tratte dalla teoria classica dell'elasticità e di caratteristiche di sollecitazione interna che, essendo legate a una curva a rottura, con tale teoria nulla hanno a che fare [B.5].

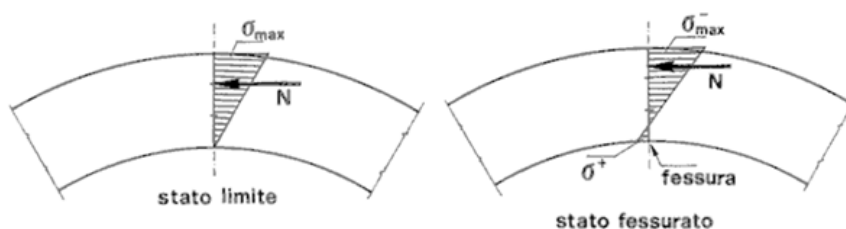


Fig. 3.5.2. Tensioni in chiave per l'arco a tutto sesto

Volendo tuttavia rivedere la teoria di Méry nell'ambito della metodologia a rottura, essa può essere considerata corrispondente a un fattore geometrico di sicurezza pari a 3 (vd. paragrafo §2.3). Infatti, l'arco è sul punto di collassare e quindi la sua stabilità non consente una riduzione del suo spessore. La posizione

limite della curva delle pressioni, in altre parole, corrisponde ad un 'arco' di spessore pari a  $1/3$  di quello dato.

In questo senso, il metodo di Méry resta incluso nella metodologia a rottura più generale, ma si comprende che non vi è a priori alcuna necessità di imporre un fattore geometrico di sicurezza pari a 3: sarà la corretta impostazione della metodologia di calcolo che fornirà l'effettivo coefficiente di sicurezza, visto come capacità resistente della struttura. E' importante comprendere il significato di coefficiente di sicurezza nell'ambito della teoria dell'analisi limite. In assenza di condizioni di congruenza, la valutazione della tensione di compressione non può corrispondere ad una soluzione univoca quale quella offerta dalla teoria dell'elasticità: tuttavia, l'individuazione di una curva delle pressioni staticamente ammissibile consente anche la valutazione di un corrispondente stato di tensione ammissibile ed in tale ipotesi possono essere svolte verifiche di sicurezza non solo per stabilità ma anche per resistenza: il coefficiente di sicurezza viene ricavato da tali verifiche, svolte in campo elastoplastico, seguendo la metodologia illustrata nei paragrafi seguenti.

## 4. VERIFICHE DI RESISTENZA

La metodologia di calcolo illustrata nei paragrafi precedenti fornisce la risposta sulla stabilità dell'arco individuando un possibile poligono funicolare: dal Teorema Statico dell'Analisi Limite (vd. paragrafo §2.1) è infatti noto che è sufficiente individuare una curva delle pressioni in equilibrio con i carichi esterni e compatibile con la sagoma dell'arco per ricavare un giudizio positivo sulla stabilità dell'arco stesso. A tale curva delle pressioni corrisponde un campo di sollecitazioni interne.

**Le modalità di collasso di un arco investono, nella realtà, anche altri aspetti oltre a quello della stabilità dell'equilibrio.** In linea di principio, si devono considerare anche i seguenti fenomeni:

- crisi per **azioni taglienti**, che determinano per la muratura scorrimento fra i giunti, dovuto al superamento della resistenza per attrito, e per il calcestruzzo il superamento del taglio resistente;
- crisi per schiacciamento, dovuta a **eccessiva compressione**;
- crisi per snervamento delle eventuali strutture di rinforzo, dovuta a **eccessiva trazione**.

Seguendo quanto specificato in §3.5.1 CNR-DT213 (testo di riferimento per i ponti esistenti in muratura ed estendibile per analogia alla generalità dei sistemi voltati in muratura o in calcestruzzo massiccio), la verifica di sicurezza deve considerare i seguenti stati limite ultimi (SLU, §2.2.1 NTC):

- a) perdita di equilibrio della struttura o di una sua parte;
- b) raggiungimento della massima capacità di resistenza di parti o dell'insieme della struttura;
- c) (per i ponti) raggiungimento di meccanismi di collasso nei terreni.

Pertanto, **si considerano i seguenti SLU** (§2.6.1 NTC):

- **lo stato limite ultimo di equilibrio come corpo rigido: EQU;**
- **lo stato limite di resistenza della struttura compresi gli elementi di fondazione: STR;**
- (per i ponti) lo stato limite di resistenza del terreno: GEO.

Lo stato limite EQU include lo stato limite di collasso per meccanismo articolato. Esso deve essere studiato mediante il Teorema Statico del Calcolo a Rottura, verificando l'esistenza di un sistema di sollecitazioni in equilibrio con la condizione di carico sottoposta a verifica e compatibile con le proprietà resistenti del materiale murario. In questo senso, la verifica allo stato limite EQU incorpora anche la verifica allo stato limite STR.

Il metodo di analisi limite implementato nel software SAV, la cui metodologia è stata illustrata nei paragrafi precedenti, implementa rigorosamente l'impostazione normativa, e **poiché STR è incluso in EQU, la curva delle pressioni risultante dall'analisi limite può essere utilizzata per determinare lo stato di sollecitazione e svolgere le conseguenti verifiche di resistenza** (compressione, taglio/attrito, trazione negli eventuali rinforzi)<sup>4.1</sup>. Quanto espresso per EQU in analisi statica, viene esteso per analogia allo stato limite ultimo SLV in analisi sismica.

<sup>4.1</sup> L'espressione normativa *"la verifica allo stato limite EQU incorpora anche la verifica allo stato limite STR"* non deve essere intesa nel senso di verifiche di resistenza implicitamente soddisfatte quando è soddisfatta la verifica di stabilità.

A titolo di esempio, si consideri un arco soggetto ad un carico distribuito in condizioni stabili: incrementando indefinitamente il carico, la forma della curva delle pressioni resta invariata e quindi l'arco rimane stabile. Eseguendo la sola verifica di stabilità, la sicurezza sarebbe sempre garantita, in evidente contrasto con un limite di resistenza a compressione del materiale che non può essere superato. Pertanto, la verifica di resistenza è una verifica aggiuntiva rispetto a quella di stabilità, ed in effetti il medesimo testo normativo afferma che nello stato limite ultimo deve essere accertata *"l'esistenza di un sistema di sollecitazioni in equilibrio con la condizione di carico verificata e compatibile con le proprietà resistenti del materiale murario"*. I requisiti di sicurezza richiedono quindi sia la verifica di stabilità, sia le verifiche di resistenza.

### 4.1. VERIFICHE A COMPRESSIONE

In una data configurazione di equilibrio stabile, per ogni sezione dell'arco è noto lo sforzo normale, composto dai due contributi della biella di estradosso e di quella di intradosso. Lo sforzo normale può

essere utilizzato per la stima della tensione di compressione della muratura, da confrontarsi con la resistenza di progetto  $f_{md}$ .

La reale distribuzione tensionale nella muratura è incognita, tuttavia è possibile avanzare alcune ipotesi ragionevoli. **La massima tensione di compressione può essere calcolata sull'arco reale attribuendo al materiale (muratura o calcestruzzo) un diagramma di comportamento di tipo elastoplastico.**

Lo studio della stabilità dell'equilibrio dell'arco non rinforzato può prevedere la formazione di cerniere: in corrispondenza di tali sezioni, la curva delle pressioni è tangente alla superficie dell'arco (esterna o interna) e la tensione di compressione nell'interfaccia tende teoricamente ad infinito: non vi sarebbe quindi alcuna possibilità di soddisfare la verifica a compressione. In realtà, sperimentalmente è stato osservato che **in una sezione dove si realizza la condizione di formazione di una cerniera, le tensioni si spalmano su una quota-parte dello spessore** (laddove una cerniera ideale prevederebbe tensioni infinite, concentrate in una linea): è quindi possibile svolgere verifiche di resistenza a compressione anche in questo tipo di sezioni.

E' inoltre possibile attribuire al materiale (muratura o calcestruzzo) una limitata resistenza a trazione in grado di consentire, in condizioni ammissibili, una piccola fuoriuscita della curva delle pressioni dalla sagoma dell'arco, laddove insorgono lievi trazioni in corrispondenza delle bielle di interfaccia.

L'esecuzione della verifica a compressione ha un'importante conseguenza per la valutazione della capacità sismica della struttura, secondo le formulazioni dell'analisi cinematica: essa infatti rende lecita l'adozione di un fattore di confidenza  $F_C$  competente all'effettivo livello di conoscenza conseguito (§8.7.1.2.1.3 NTC) ( $F_C$  entra in gioco nel calcolo della capacità sismica). Non eseguire la verifica a compressione equivale ad assumere per l'arco una resistenza a compressione infinita e conseguentemente diviene obbligatoria, secondo la normativa, l'applicazione del fattore di confidenza più sfavorevole (competente a LC1: 1.35) indipendentemente dal reale livello di conoscenza.

#### • Arco non rinforzato

Nel caso di assenza di rinforzi, il comportamento della muratura o del calcestruzzo viene definito da un diagramma di progetto (§4.1.2.1.2.1 NTC) (modello tensione-deformazione) che può essere scelto fra (b) triangolo-rettangolo (elastico-perfettamente plastico) e (c) rettangolo (stress-block) (fig. 4.1.1).

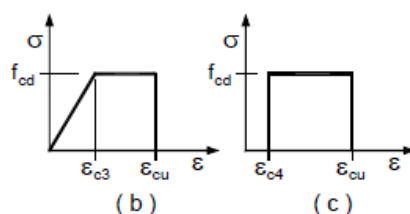


Fig. 4.1.1. Diagramma di comportamento della muratura

La resistenza a compressione di progetto  $f_{cd}$  in fig. 4.1.1 si riferisce al calcestruzzo; comportamento analogo viene assunto per la muratura, per la quale la resistenza si indica con  $f_{md}$ .

Per la muratura:  $f_{md} = f_m / F_C / \gamma_M / \gamma_D$ , essendo  $f_m$  la resistenza a compressione media della muratura,  $F_C$  il fattore di confidenza,  $\gamma_M$  il coefficiente parziale di sicurezza del materiale e  $\gamma_D$  il coefficiente di degrado (secondo §6.5.4 CNR-DT213); per il calcestruzzo massiccio si fa riferimento alla formulazione indicata in §6.3.4 LG 2022:  $f_d = \min(f_m / F_C / \gamma_M; f_k / F_C)$ , eventualmente applicando per analogia con la muratura il coefficiente di degrado  $\gamma_D$ .

Il comportamento triangolo-rettangolo (elastico lineare-perfettamente plastico) è governato dalle seguenti equazioni che forniscono il momento resistente in funzione dello sforzo normale lungo le curve delle frontiere (la fig. 4.1.2 illustra il dominio di resistenza, dove  $f_d$  indica in generale la resistenza a compressione di progetto).

$N_u = f_d \cdot L \cdot t$  è lo sforzo normale ultimo, sforzo di compressione massimo ( $s$ =spessore della sezione nel piano di flessione,  $t$  = spessore in profondità).



- Stato limite elastico (SLE) a sezione interamente reagente:  
per  $N \leq (N_u/2)$ :  $M = N \cdot s/6$ , per  $N \geq (N_u/2)$ :  $M = s/6 \cdot (N_u - N)$ .  
Momento massimo:  $M = N_u \cdot s/12$  per  $N = N_u/2$ .  
L'eccentricità è  $\leq s/6$  e la curva delle pressioni è interna al fuso corrispondente al nocciolo d'inerzia.

Se l'eccentricità è maggiore di  $s/6$ , e minore di  $s/2$ , si individuano i seguenti campi:

- Stato limite elastico (SLE) a sezione parzialmente reagente:  
 $M = N \cdot s/2 \cdot [1 - 4 \cdot N / (3 \cdot N_u)]$ . Momento massimo:  $M = 3/32 \cdot N_u \cdot s$  per  $N = 3/8 \cdot N_u$
- Stato limite elastoplastico (SLEP) a sezione interamente reagente:  
 $M = s/2 \cdot (N_u - N) \cdot [1 - 4/3 \cdot (N_u - N) / N_u]$ . Momento massimo:  $M = 3/32 \cdot N_u \cdot s$  per  $N = 5/8 \cdot N_u$
- Stato limite elastoplastico (SLEP) a sezione parzialmente reagente:  
 $M = N \cdot s/2 \cdot (1 - N/N_u)$ . Momento massimo:  $M = N_u \cdot s/8$  per  $N = N_u/2$ .

Al punto di sollecitazione  $(N, M)$  interno al dominio di resistenza corrisponde, a seconda del campo in cui si colloca (zone del dominio in fig. 4.1.2), la zona reagente e la tensione di compressione di progetto pari al valore massimo per la corrispondente distribuzione di tensioni.

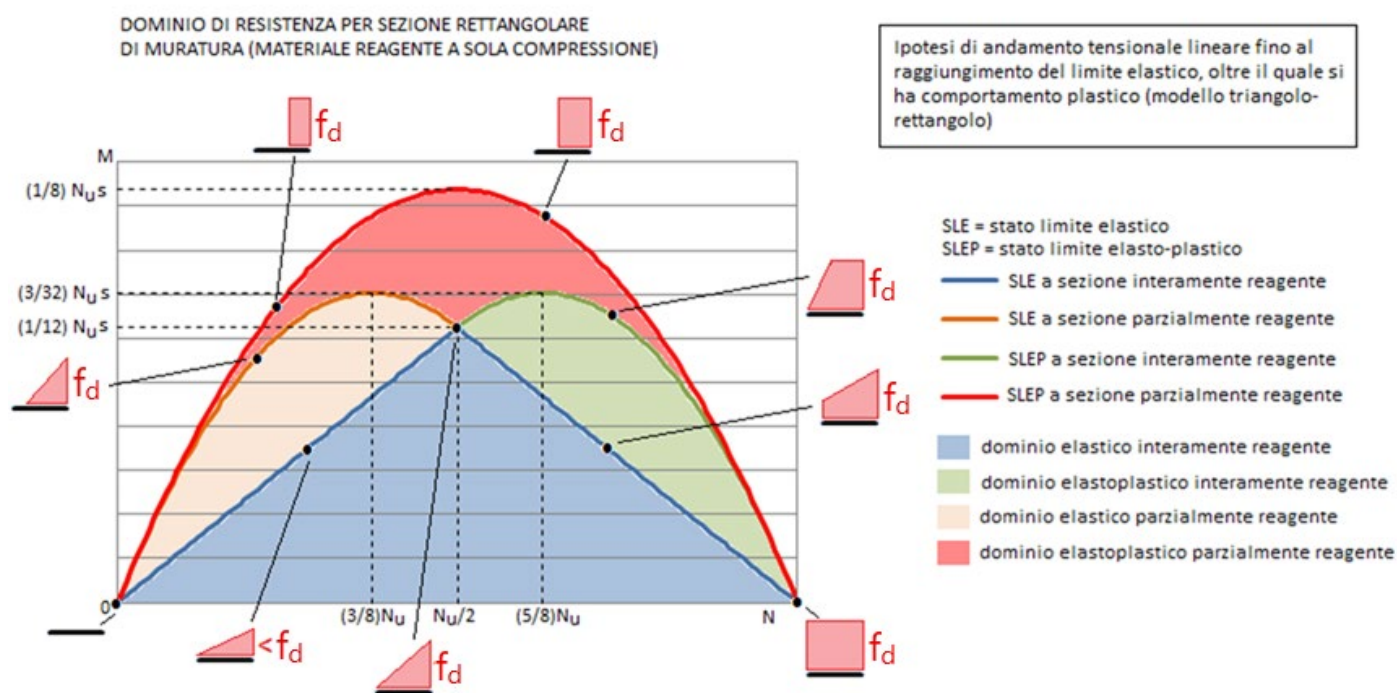


Fig. 4.1.2. Dominio di resistenza  $(N, M)$

Scegliendo in alternativa il diagramma di comportamento a rettangolo (stress-block), la distribuzione rettangolare della tensione con il suo valore massimo ammissibile (resistenza di progetto) consente la definizione della frontiera più esterna del dominio, ossia del momento ultimo, corrispondente ad una eccentricità della curva delle pressioni pari a  $s/2$ .

Per poter definire lo stato di compressione corrispondente ad un punto interno  $(N, M)$ , si fa riferimento:

- al dominio elastico a sezione interamente reagente, se l'eccentricità è  $\leq s/6$  (curva delle pressioni interna al fuso corrispondente al nocciolo d'inerzia);
- ad un diagramma di tensione triangolare, nel caso di eccentricità  $> s/6$  ossia di sezione parzializzata: in tal caso la zona reagente è minore della dimensione  $s$ .

Anche nel caso di comportamento stress-block è quindi possibile definire la zona reagente.

La condizione di stabilità dell'equilibrio dell'arco può prevedere la formazione di cerniere in una o più sezioni (fino ad un massimo di 3): in corrispondenza di tali sezioni, la curva delle pressioni risulta tangente alla superficie dell'arco (esterna o interna) e la tensione di compressione nell'interfaccia tende teoricamente ad infinito. Non vi sarebbe quindi alcuna possibilità di soddisfare la verifica a compressione.

In realtà, è possibile precisare il percorso di verifica con le seguenti considerazioni.

**Sperimentalmente, si è osservato che in una sezione fessurata - sia essa rinforzata e quindi con apertura contrastata, o non-rinforzata e quindi con apertura libera (cerniera) - le tensioni si spalmano su una quota-parte dello spessore  $s$  pari a  $s/3$**  (laddove una cerniera ideale prevederebbe tensioni infinite, concentrate in una linea) [B.6].

Nella realtà, quindi, lo schiacciamento della muratura non è 'puntuale' ma interessa una frazione dello spessore dell'arco, fino ad un massimo pari a  $s/3$ . In corrispondenza della sezione dove si forma una cerniera, la distribuzione delle tensioni su ( $s/3$ ) viene determinata dall'equilibrio con lo sforzo normale, ed è considerata in prima ipotesi triangolare, calcolando come tensione di compressione di progetto il valore massimo in tale distribuzione. Se la distribuzione triangolare non è sufficiente, si passa alla trapezoidale e, se ancora non sufficiente, alla rettangolare: in questi casi la tensione di compressione di progetto è sempre pari alla resistenza a compressione. Qualora un diagramma rettangolare con zona reagente pari a  $s/3$  non equilibri lo sforzo normale neppure assegnando alla tensione il valore massimo possibile, pari alla resistenza a compressione, la verifica di compressione in corrispondenza della sezione sede di cerniera non risulta soddisfatta.

Vi sono altre due considerazioni importanti riguardanti il calcolo delle tensioni di compressione, entrambe corrispondenti a due opzioni di calcolo implementate nel software SAV e rese possibili dall'incognita riguardante la reale distribuzione delle tensioni.

(i) Una prima osservazione riguarda le sezioni dove la curva delle pressioni è interna all'arco (entrambe le bielle che schematizzano le azioni interne sono compresse), ma fuori dal nocciolo d'inerzia: si tratta sia di sezioni in zone vicine alle cerniere, sia di sezioni con entrambe le bielle compresse ma con valori tali dello sforzo normale da generare parzializzazione. In una tale configurazione, la zona reagente, in dipendenza dalla legge di comportamento scelta (triangolo-rettangolo o stress-block), potrebbe mostrare valori inferiori a  $1/3$  dello spessore: questo risulterebbe incongruente con la valutazione della zona reagente in corrispondenza dell'interfaccia di cerniera. Per risolvere l'incongruenza, nelle sezioni parzializzate (ossia quelle dove la curva delle pressioni è esterna al nocciolo) è possibile considerare una zona compressa non inferiore a  $1/3$  dello spessore.

Pertanto: in assenza di rinforzi, in caso di sezione parzializzata, se la tensione calcolata è superiore alla resistenza o la zona reagente è inferiore a  $1/3$  dello spessore, questa opzione consente il ricalcolo su una zona reagente pari a  $1/3$  dello spessore, in modo del tutto analogo al controllo eseguito automaticamente nelle sezioni di cerniera, sopra descritto.

Il momento sollecitante  $M$  viene ricalcolato in base al diagramma delle compressioni, mentre il momento ultimo  $M_u$  è definito dalla distribuzione rettangolare della tensione pari alla resistenza su ( $s/3$ ) (il braccio della risultante è pari a ( $s/3$ )). La verifica di sicurezza è soddisfatta se  $M \leq M_u$ .

La procedura indicata a questo punto (i) è da ritenersi in generale necessaria per evitare, come evidenziato, situazioni incongruenti fra le sezioni di cerniera e quelle limitrofe.

(ii) Un'ulteriore osservazione sul calcolo della tensione di compressione nelle sezioni parzializzate non rinforzate deriva dallo schema di calcolo adottato, dove le bielle che trasmettono sforzo normale sono collocate agli estremi della sezione, in estradosso e in intradosso. Ad ognuna delle due bielle può così essere riferita una 'zona d'influenza' pari a metà sezione. Per le sezioni parzializzate non rinforzate è dunque

possibile l'estensione della compressione alla parte restante di metà sezione dalla parte della curva delle pressioni (ossia dalla parte della biella più compressa), fermo restando che in ogni caso lo schiacciamento (zona con tensione pari alla resistenza) interessi al massimo  $(1/3)$  dello spessore.

Seguendo questa considerazione, quando una zona reagente pari a  $(s/3)$  non è sufficiente per equilibrare lo sforzo normale neppure con diagramma rettangolare di compressione pari alla resistenza, si ipotizza l'esistenza di una compressione anche nella zona restante  $(s/6)$  dalla parte della biella più compressa, purché questa non raggiunga il valore della resistenza (lo schiacciamento deve essere sempre limitato a  $(s/3)$ ); si considera, per semplicità, che la compressione su tale zona  $(s/6)$  sia sempre distribuita su un diagramma di tipo rettangolare.

Con l'estensione del diagramma di compressione da  $(s/3)$  a  $(s/2)$ , il momento sollecitante  $M$  viene ridefinito in base alla posizione della risultante complessiva del diagramma di compressione; il momento ultimo  $M_U$  viene posto pari al momento corrispondente alla resistenza spalmata su  $(s/2)$ : tale valore di  $M_U$  rappresenta un limite non raggiungibile, essendo lo schiacciamento limitato a  $(s/3)$ , e pertanto la verifica di sicurezza è soddisfatta se  $M < M_U$ .

L'estensione della zona reagente indicata a questo punto (ii) non è da ritenersi necessaria: essa può essere considerata semplicemente con lo scopo di evitare possibili eccessive penalizzazioni sullo stato di compressione della struttura.

#### • Arco rinforzato

In presenza di rinforzi, nel caso di sezione parzializzata la distribuzione rettangolare di calcolo si estende per  $0.8x$  ( $x$  = asse neutro, dal calcolo di verifica della sezione) e viene studiato l'equilibrio ultimo fra tensioni di compressione e sforzo di trazione. Si utilizzano le equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione.

- Nel **calcolo di verifica**, nota l'area del rinforzo e le sollecitazioni di progetto ( $N, M$ ), si determina la posizione  $x$  dell'asse neutro e il momento resistente  $M_U$  (momento ultimo): la verifica è soddisfatta quando  $M \leq M_U$ .

- Nel **calcolo di progetto**, il momento sollecitante viene posto uguale al momento resistente e utilizzando le equazioni di equilibrio si determinano la posizione dell'asse neutro  $x$  e l'area del rinforzo che sarà quindi pari all'area strettamente necessaria per soddisfare la verifica di sicurezza.

In ogni caso, per congruenza con le verifiche dell'arco non rinforzato, è possibile considerare nelle zone di cerniera e in generale nelle zone parzializzate una zona reagente a compressione non inferiore a  $(1/3)$  dello spessore; in nessun caso, quindi, il rinforzo può determinare nell'arco una zona reagente inferiore a quella dell'arco non rinforzato. Questa impostazione è coerente con lo svolgimento di verifiche a taglio che considerano le tensioni tangenziali distribuite sulla sola zona reagente a compressione.

## 4.2. COEFFICIENTE PARZIALE DI SICUREZZA

Il calcolo della resistenza a compressione di progetto si svolge tenendo presenti il coefficiente parziale di sicurezza  $\gamma_M$  ed il fattore di confidenza  $F_C$ . Conformemente alla Normativa vigente, il valore di  $\gamma_M$  viene distinto fra Analisi Statica (§4.5.6.1 NTC) e Analisi Sismica (§C8.7.1 NTC).

Sui valori assunti da  $\gamma_M$  sono opportune alcune considerazioni. Con riferimento alla muratura, i valori consueti di  $\gamma_M$  sono 2.0 per l'Analisi Sismica e un valore compreso fra 2.0 e 3.0 per l'Analisi Statica: il valore 3.0 pone la verifica a favore di sicurezza; per i ponti esistenti in muratura il riferimento al valore 3.0 è presente in §8.6.1 CNR-DT213 dove  $\gamma_M$  è posto pari a  $3 \cdot \gamma_D$  essendo  $\gamma_D$  il coefficiente introdotto per la riduzione di resistenza in caso di degrado.

Si osservi che l'analisi limite, applicata in SAV, è di fatto un'analisi non lineare finalizzata alla ricerca di una curva delle pressioni compatibile con i carichi e con la geometria della struttura, consentendo un numero massimo di punti tangenti all'estradosso o all'intradosso (dove si formano cerniere). La non linearità è resa evidente dalla generale mancanza di proporzionalità fra forze applicate e sollecitazioni prodotte.

Dal punto di vista sismico, la ricerca della configurazione di collasso, condotta attraverso un'analisi

incrementale con formazione di cerniere, mostra un'analogia con l'analisi pushover. La Normativa vigente, in §C8.7.1.3.1.1 NTC afferma che nel caso di analisi sismica non lineare i valori di calcolo delle resistenze sono ottenuti dividendo i valori medi (di riferimento) per i rispettivi fattori di confidenza ma non per il coefficiente parziale di sicurezza sui materiali  $\gamma_M$ , il che significa assumere  $\gamma_M = 1.0$  in analisi sismica.

Per quanto riguarda l'analisi statica, non vi sono indicazioni specifiche in tal senso. Si può osservare che in analisi statica le sollecitazioni vengono ottenute amplificando le azioni attraverso i coefficienti di combinazione (che definiscono le singole Combinazioni di Condizioni di Carico statiche, aventi tipologia di Combinazioni fondamentali come definite da [2.5.1] in §2.5.3 NTC), mentre per le resistenze sono previsti tre fattori di riduzione:  $\gamma_M$ ,  $F_C$  e  $\gamma_D$ . In base a quanto sopra osservato per la trascurabilità di  $\gamma_M$  in analisi sismica, l'analisi statica può rivelarsi eccessivamente cautelativa nei confronti della sismica. Potrebbe quindi essere plausibile la scelta di  $\gamma_M = 1.0$  anche per l'analisi limite (di natura non lineare) in campo statico.

In alternativa, dato che l'analisi limite appartiene al campo delle analisi per cinematismi, la verifica a compressione può essere trascurata seguendo le indicazioni della Normativa per le analisi secondo meccanismi di collasso in §C8.7.1.2.1.3 NTC, purché il fattore di confidenza corrisponda al livello di conoscenza LC1:  $F_C = 1.35$  (comunque affetto, nel caso dei ponti, dal fattore di difformità  $\gamma_C$ ).

Seguendo questo percorso,  $F_C$  non condiziona la verifica di resistenza a compressione, che non viene eseguita, ma permane la sua influenza sulla capacità sismica in termini di PGA, in quanto  $F_C$  è presente nella formulazione dell'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo ( $F_C$  influisce anche sul risultato della verifica ad attrito, se eseguita).

Ulteriori considerazioni sono le seguenti. Per quanto già illustrato, ai fini della sicurezza frequentemente, nelle strutture in muratura esistenti,  $\gamma_M$  viene assunto pari a 3.0 tenendo conto che valori più bassi sono proposti per le murature nuove in considerazione dei controlli di produzione e di esecuzione. Tuttavia, come specificato in [B.7], per gli edifici esistenti *“valori più bassi di  $\gamma_M$  potrebbero essere giustificati sulla base della considerazione che il coefficiente di sicurezza parziale è funzione anche delle incertezze realizzative non significative nel caso di edifici esistenti”*. Si deve anche tenere presente quanto espresso dalla Normativa nel capitolo dedicato agli edifici esistenti, e più precisamente in §C.8.5 NTC, paragrafo riferito a tutti i tipi di azione (azioni statiche e azioni sismiche):

#### **§C.8.5: DEFINIZIONE DEL MODELLO DI RIFERIMENTO PER LE ANALISI**

*(...) Per gli edifici in muratura, anche considerate le conoscenze acquisibili, le verifiche nei riguardi di tutte le azioni possono essere eseguite utilizzando, quando previsto, un coefficiente  $\gamma_M$  non inferiore a 2. (...)*

Seguendo queste indicazioni, il valore  $\gamma_M = 2.0$  può essere adottato in entrambe le verifiche statica e sismica.

Per quanto riguarda le strutture in calcestruzzo, dove il coefficiente parziale  $\gamma_M$  viene indicato dal simbolo  $\gamma_C$ , valgono le seguenti considerazioni specifiche.

$\gamma_C$  assume valori distinti tra il caso di struttura voltata non soggetta a traffico e ponte.

Per le strutture non soggette a traffico,  $\gamma_C$  assume, come da NTC, il valore 1.50. Nel caso dei ponti, il valore di  $\gamma_C$  si distingue fra verifiche di Adeguamento statico o Sismica ( $\gamma_C = 1.50$ ) e Verifiche di Operatività e Transitabilità (Tab.6.6 LG 2022) ( $\gamma_C = 1.26$ ).

Si osservi che nelle LG 2022 la Tab.6.7 sui fattori parziali di sicurezza non include i ponti esistenti in muratura: per questi ultimi si potranno applicare in generale i valori sopra indicati per le analisi statica e sismica; tuttavia, nel software SAV viene consentita la specifica in input di valori personalizzati.

### **4.3. VERIFICHE A TAGLIO**

Utilizzando i valori dei tagli e degli sforzi normali competenti alla configurazione stabile dell'arco, è possibile eseguire la verifica a taglio, che per la muratura consiste nella verifica a scorrimento (o equivalentemente ad attrito) in corrispondenza dei giunti. Affinché questa verifica sia soddisfatta occorre che il taglio  $T$  sia

inferiore alla forza di attrito  $f \cdot N_c$ , dove  $N_c$  è la risultante delle forze di compressione (determinata dalle sole bielle compresse) e per  $f$  si assume il coefficiente di attrito della malta interposta fra i mattoni o i conci di pietra, o del concio sul concio nel caso di assenza di interposizione di malta (conci in mutuo contrasto tra loro). Si ha:  $f = \tan \alpha$ , con  $\alpha$  angolo di attrito interno; per le malte si assume in genere:  $\alpha = 35^\circ$ , da cui:  $f = 0.7$ . In altri termini, i lati del poligono funicolare dovranno formare un angolo minore di  $35^\circ$  con le normali alle sezioni dell'arco (più precisamente: alle interfacce) affinché non sia possibile lo scorrimento fra i conci. Analogamente alla verifica di resistenza a compressione, per la verifica di resistenza a taglio al coefficiente di attrito visto come proprietà del materiale può essere applicato un coefficiente di sicurezza  $\gamma$  e si dovrà quindi ottenere:  $T \leq f \cdot N_c / \gamma$ .

Il coefficiente di sicurezza  $\gamma$  è composto da due contributi: il coefficiente parziale di sicurezza sui materiali  $\gamma_M$  e il fattore di confidenza  $F_C$ , oltre all'eventuale coefficiente di degrado  $\gamma_D$  (si ritiene che  $\gamma_D$ , in quanto descrittivo dello stato di fatto del materiale, debba essere sempre applicato indipendentemente da  $\gamma_M$  e  $F_C$ ).

La verifica a taglio viene riformulata diversamente per le strutture massicce in calcestruzzo, dove non ci sono giunti e quindi fenomeni di scorrimento: per tali strutture la sollecitazione di taglio viene confrontata con il taglio resistente del calcestruzzo, definito in §4.1.11.1 NTC (dove viene considerata la resistenza a taglio prodotta dalla zona reagente a compressione) o in alternativa in §6.3.5.2 LG 2022.

Per il sistema voltato, sia per l'arco che per i piedritti, la verifica a taglio può essere priva di significato se per i conci vi è l'impossibilità di uno scorrimento, come può ad esempio avvenire nelle zone massicce alle imposte dove la struttura dell'arco si connette alle strutture murarie adiacenti e sovrastanti; si può dunque ritenere lecito evitare l'esecuzione della verifica a taglio in tali zone.

#### 4.4. VERIFICHE A TRAZIONE DEI RINFORZI

In presenza di rinforzi quali cappa in calcestruzzo o applicazione di compositi fibrorinforzati a matrice polimerica (FRP) o inorganica - cementizia (FRCM), posti in estradosso oppure in intradosso, sul lato dell'interfaccia dove è presente il rinforzo è ammessa la presenza di trazione: le bielle di interfaccia interessate dallo sforzo di trazione possono quindi essere considerate in condizioni ammissibili, purché ovviamente venga svolta la verifica di resistenza a trazione delle strutture di consolidamento.

In corrispondenza di tali interfacce la curva delle pressioni può fuoriuscire dalla sagoma dell'arco.

La presenza dei rinforzi inibisce la formazione di cerniere nelle sezioni dove questi sostengono sforzi di trazione, e quindi contrastano l'insorgere dei meccanismi di collasso: la capacità della struttura tende quindi ad essere determinata dalla resistenza e non dalla stabilità.

Particolari tipi di rinforzi possono contribuire alla stabilità dell'arco attraverso un'azione di precompressione della muratura: è questo il caso della tecnica dell'arco armato, dove l'obiettivo diventa quello di assicurare stabilità alla struttura ricentrando la curva delle pressioni attraverso la tesatura di cavi su valori di progetto noti; i cavi applicano una compressione aggiuntiva all'arco. La verifica a compressione garantisce che tale effetto non sia eccessivo, e quindi la capacità della struttura rinforzata viene valutata attraverso le verifiche di stabilità e di compressione.

##### • Rinforzi con cappa in calcestruzzo e in materiali compositi

La verifica delle sezioni parzializzate viene eseguita studiando l'equilibrio a traslazione e rotazione fra la risultante delle compressioni e lo sforzo di trazione fornito dall'armatura della cappa o dalla fibra del composito.

In SLU (studiato con Analisi Limite) la zona compressa viene schematizzata attraverso il modello rettangolare (stress-block).

In SLE (studiato con Analisi Elastica, vd. paragrafo §6) il comportamento del materiale compresso (muratura o calcestruzzo) viene considerato indefinitamente elastico (§8.4.2 CNR-DT213): pertanto, il diagramma delle tensioni di compressione è di tipo triangolare, dal valore nullo in corrispondenza dell'asse neutro al valore massimo in corrispondenza dell'estremo lembo compresso.

In tutte le verifiche vale il principio di conservazione delle sezioni piane, con diagramma delle deformazioni lineare, dal valore massimo di dilatazione al lembo teso al valore massimo di accorciamento al lembo compresso.

Nel caso di rinforzo con cappa in calcestruzzo, lo sforzo di trazione viene confrontato con la capacità di resistenza della rete e.s., con riferimento al numero di barre incontrate lungo la profondità dell'arco e alla tensione di snervamento dell'acciaio B450C ( $391 \text{ N/mm}^2$ ; infatti:  $f_{yk}=450 \text{ N/mm}^2$  (§11.3.2.1 NTC),  $f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s=450/1.15=391 \text{ N/mm}^2$ : §3.2.7 EC2 e §2.4.2.2(1) EC2 per  $\gamma_s$ ; §4.1.2.1.1.3 NTC).

La cappa in calcestruzzo può non essere armata (assenza di rete): in tal caso, l'incremento di sicurezza della struttura è legato solo all'aumento del peso proprio, i cui effetti possono essere favorevoli staticamente ma di dubbia efficacia se non sfavorevoli dal punto di vista sismico (a causa dell'aumento di massa) e le verifiche competenti al rinforzo riguardano solo la tensione di compressione nel calcestruzzo.

Nel caso di rinforzo con compositi FRP o FRCM, lo sforzo di trazione viene confrontato con la resistenza a trazione di progetto, distinta nei casi di estradosso ed intradosso, per tenere conto degli effetti dovuti alla curvatura che possono tradursi in una riduzione di resistenza in intradosso. Riferimenti normativi per la riduzione di resistenza in caso di superfici curve e rinforzi in intradosso sono i seguenti: per FRCM: §13 CNR-DT 215; per FRP: §5.3.4 CNR-DT 200 R1 e §4.3 LG 2009.

Eseguendo un calcolo di progetto, i rinforzi (passo delle barre nella cappa armata o superfici di applicazione dei compositi) vengono dimensionati come strettamente necessari in base alle resistenze. La larghezza del rinforzo in composito non può ovviamente eccedere la profondità dell'arcata.

Nel caso di calcolo di verifica: per la cappa armata la verifica viene condotta considerando un passo di rete specificato; per i compositi, la verifica si esegue considerando la larghezza di applicazione del rinforzo specificata.

I parametri in input sui compositi in FRP o FRCM richiedono:

- modulo di elasticità nella direzione delle fibre  $E_f$  ( $\text{MPa}=\text{N/mm}^2$ );
- n° di strati del rinforzo;
- spessore del singolo strato  $t_f$  (mm);
- larghezza o profondità  $p_f$  (cm):

nel calcolo la larghezza è considerata sempre  $\geq 5 \text{ cm}$  e  $\leq$  della profondità del singolo Arco o, per Volta con più archi, di ogni arco ideale;

- resistenze di progetto per SLU ( $\text{N/mm}^2$ ) in estradosso e in intradosso:

la distinzione fra estradosso e intradosso dipende dalla possibilità di tener conto degli effetti in intradosso dovuti alla curvatura della superficie.

Per quanto riguarda il valore da considerare per la resistenza di progetto per SLU, si fa riferimento alle seguenti indicazioni normative: FRCM: CNR-DT 215, FRP: CNR-DT 200 R1.

- **FRCM**

### 3.2 VALORI DI PROGETTO

Il valore di calcolo,  $X_d$ , della generica proprietà di resistenza o di deformazione di un sistema di rinforzo FRCM è espresso mediante una relazione del tipo:

$$X_d = \eta \cdot \frac{X_k}{\gamma_m} \quad (3.1)$$

dove  $\eta$  è un opportuno fattore di conversione che tiene conto di problemi speciali,  $X_k$  è il valore caratteristico della proprietà in questione e  $\gamma_m$  è il fattore parziale corrispondente.

Quest'ultimo è pari a 1.5 per gli Stati Limite Ultimi (SLU); a 1.0 per gli Stati Limite di Esercizio (SLE). Per le verifiche nei confronti degli Stati Limite Ultimi vanno tenuti in conto gli effetti dei fattori ambientali attribuendo al fattore di conversione  $\eta$ , in mancanza di dati più specifici, i valori  $\eta_a$  esposti nella Tabella 3.1, qualunque sia la natura della rete.

Condizione di esposizione	$\eta_a$
Interna	0.90
<u>Esterna</u>	<u>0.80</u>
Ambiente aggressivo	0.70

Ponti

Tabella 3.1 – Fattori di conversione ambientale.

Per quanto attiene alle verifiche nei confronti degli Stati Limite di Esercizio, previste per gli interventi su strutture di c.a., si deve tener conto del fenomeno della fatica statica come prescritto al § 5.1.2.

#### 5.1.2 Verifica allo SLE

Sotto i carichi di esercizio la tensione massima nell'acciaio delle armature tese non può eccedere l'80% della corrispondente tensione di progetto.

Pertanto: in SLU si devono considerare i seguenti coefficienti:

- $\eta$  (fattore ambientale: 0.8 per esposizione esterna)
- $\gamma_m = 1.5$

In SLE:

- 80% della resistenza del composito (§5.1.2 CNR-DT 215)
- $\gamma_m = 1.0$

Per quanto riguarda l'implementazione in SAV, posto che la resistenza in input è il valore per SLU, la resistenza per SLE viene valutata dal software moltiplicando per 1.5 la resistenza SLU.

### 3.3.3 Proprietà dei materiali e relativi valori di calcolo

(5) Il valore di calcolo,  $X_d$ , della generica proprietà di resistenza o di deformazione di un materiale FRP è espresso mediante una relazione del tipo:

$$X_d = \eta \cdot \frac{X_k}{\gamma_m}, \quad (3.2)$$

dove  $\eta$ , fattore di conversione, tiene conto di problemi speciali di progetto (§ 3.5),  $X_k$  è il valore caratteristico della proprietà in questione,  $\gamma_m$  è infine il coefficiente parziale del materiale FRP (§ 3.4).

Nei casi in cui debba essere considerata sia l'influenza dei fattori ambientali che quella dei carichi di lunga durata (Stati Limite di Esercizio), il fattore di conversione  $\eta$  si ottiene come prodotto del fattore di conversione ambientale (§ 3.5.1),  $\eta_a$ , per il fattore di conversione relativo agli effetti di lunga durata (§3.5.2),  $\eta_l$ .

Nei casi in cui debba essere considerata considerata l'influenza dei soli fattori ambientali (Stati Limite Ultimi), il fattore di conversione  $\eta$  coincide con  $\eta_a$  (§ 3.5.1).

## 3.4 COEFFICIENTI PARZIALI

### 3.4.1 Coefficienti parziali $\gamma_m$ per i materiali FRP

(1) Nei riguardi degli Stati Limite Ultimi al coefficiente parziale  $\gamma_m = \gamma_f$  dei materiali FRP può essere attribuito il valore 1.10. Per il solo Stato Limite Ultimo di distacco dal supporto sono invece suggeriti valori di  $\gamma_m = \gamma_{f,d}$  variabili, a giudizio del progettista, da 1.20 a 1.50 in funzione della maggiore o minore possibilità di prevedere, per la specifica applicazione, l'effettivo comportamento del composito nei riguardi del distacco dal supporto. A tal riguardo possono contribuire i risultati di indagini sperimentali condotte dal Produttore e/o dal Fornitore, ovvero appositamente e preventivamente eseguite nell'ambito della specifica applicazione.

(2) Nei riguardi degli Stati Limite di Esercizio, al coefficiente parziale  $\gamma_m = \gamma_f$  dei materiali FRP può essere attribuito il valore unitario.

Per il fattore di conversione ambientale non si rileva una specifica indicazione per SLU; inoltre, per SLE sono previsti gli effetti di lunga durata. Per quanto riguarda i coefficienti parziali, la distinzione fra SLU e SLE è identica a FRCM:  $\gamma_m = 1.5$  in SLU e 1.0 in SLE.

In definitiva, anche per FRP (come FRCM), posto che la resistenza in input è il valore per SLU, la resistenza per SLE viene valutata da SAV moltiplicando per 1.5 la resistenza SLU.

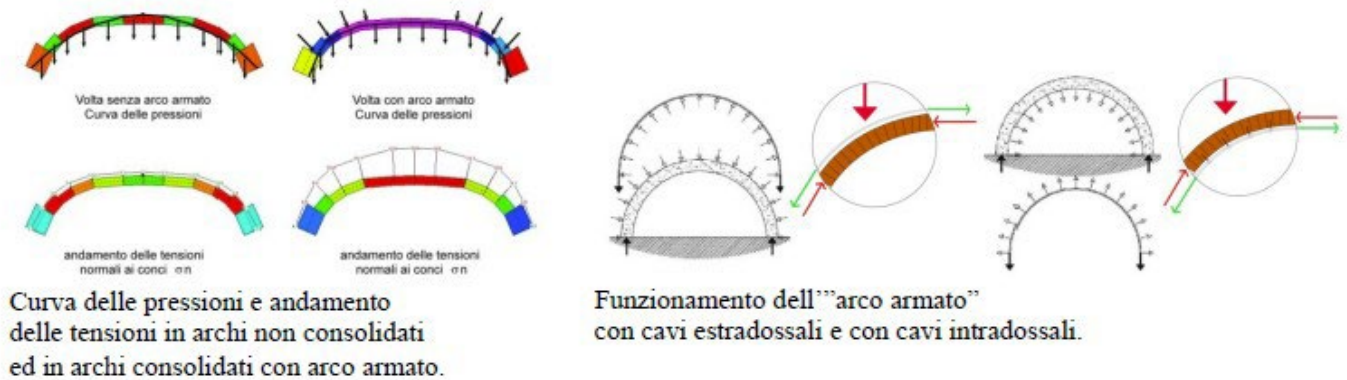
Nel caso si dovesse considerare in SLE un fattore di conversione per effetti di lunga durata che modifica i rapporti fra le resistenze SLU e SLE, è consigliabile specificare un valore a favore di sicurezza che tenga conto del rapporto 1.5, fra resistenza SLE e resistenza SLU, applicato in SAV.



## • Rinforzo con la tecnica dell'“arco armato”

La tecnica dell'“arco armato”, proposta ed applicata dal Prof. Jurina [F.1] [F.2] [F.3] (da tali lavori sono tratte le figg. 4.4.1, 4.4.2) è un metodo di consolidamento leggero, reversibile e privo di incrementi significativi di massa, concepito per contrastare la formazione delle cerniere e ripristinare uno stato di sollecitazione prevalentemente di compressione.

Il metodo consiste nella posa di uno o più cavi metallici tesi, disposti parallelamente alla generatrice dell'arco o della volta, in posizione estradossale e/o intradossale. Il tiro imposto ai cavi induce uno stato di precompressione nei conci, rendendoli capaci di resistere anche a sollecitazioni flessionali (fig. 4.4.1).



Schematizzazione del funzionamento dell'“arco armato”.  
I conci risultano tanto compressi quanto tesa è la fune

Fig. 4.4.1. Funzionamento dell'“arco armato”

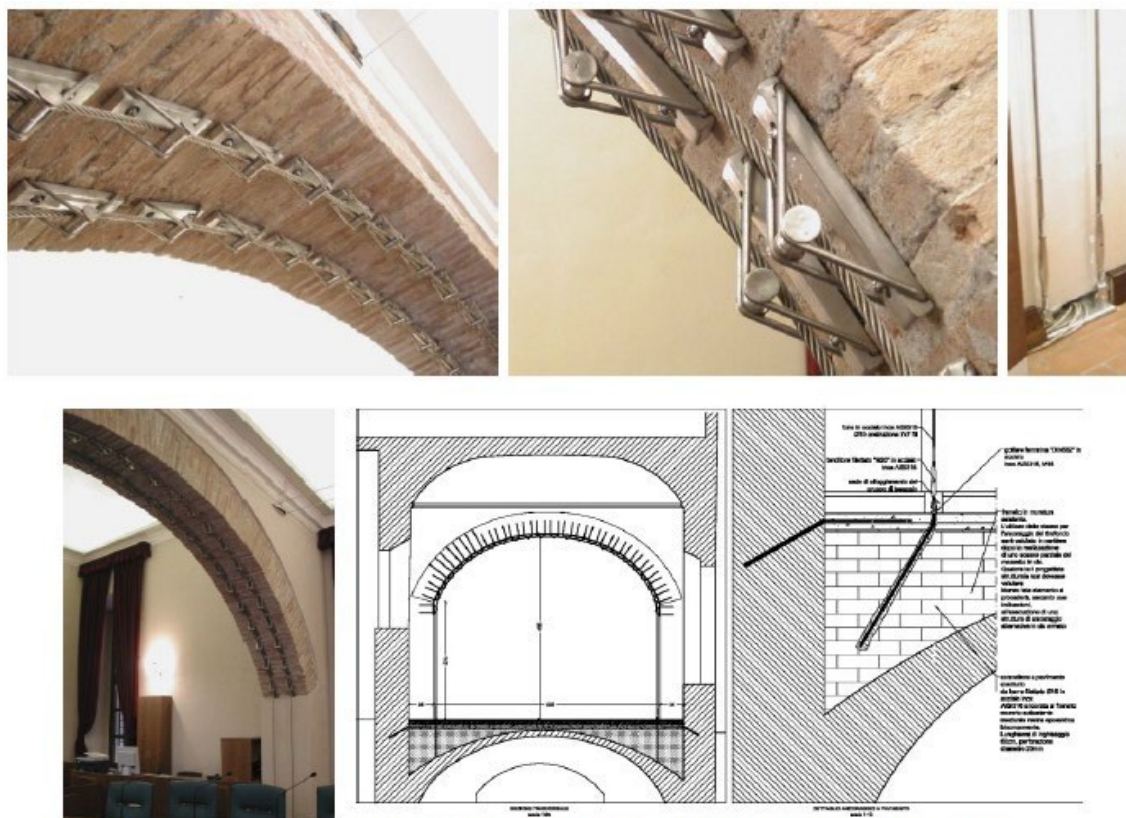
La tesatura dei cavi attiva un sistema di forze radiali che ricentra la curva delle pressioni, avvicinando il comportamento strutturale alla condizione ideale di compressione pura tra concio e concio, impedendo o posticipando la formazione delle cerniere.

Dal punto di vista concettuale, la tecnica dell'arco armato rappresenta un approccio particolarmente adatto all'intervento sul costruito storico. In un qualsiasi progetto strutturale i parametri fondamentali sono geometria, materiali e carichi: ma nel caso delle strutture esistenti, geometria e materiali sono generalmente non modificabili per esigenze di tutela. La tecnica dell'“arco armato” non agisce né sulla geometria né sui materiali, bensì sui carichi: infatti modifica il sistema delle forze applicate, rendendo la geometria esistente compatibile con i carichi agenti. Ne deriva un intervento compatibile con le esigenze di tutela delle strutture storiche e sostanzialmente non invasivo.

Nel caso di applicazione all'estradosso, il cavo viene semplicemente appoggiato sulla superficie della volta, previa interposizione di uno strato di ripartizione, generalmente in malta fibrorinforzata, con funzione di distribuzione delle pressioni e di riduzione dell'attrito allo scorrimento. La post-tesatura può essere realizzata tramite cunei forzati o tenditori. Nelle applicazioni all'intradosso, il cavo deve essere fissato puntualmente ai singoli conci mediante connettori metallici, rendendo l'intervento più complesso dal

punto di vista esecutivo. La messa in tiro avviene tramite tenditori oppure mediante l'accorciamento controllato dei connettori.

L'efficacia della tecnica è legata all'intensità delle forze radiali trasmesse dal cavo teso alla muratura, che dipendono dal raggio di curvatura locale dell'arco. Il cavo è sollecitato a sola trazione, e poiché il cavo segue la stessa curvatura dell'arco, le forze scambiate per azione e reazione inducono nell'arco uno stato di compressione pura. Per conseguenza, nell'arco si ottiene un incremento significativo della capacità portante nei confronti dei meccanismi di collasso di tipo flessionale.



Dettagli dell'arco armato intradosale realizzato nell'ex convento di San Cristoforo, in Lodi.

*Fig. 4.4.2. Esempio applicativo della tecnica dell'"arco armato"*

Il consolidamento con la tecnica dell'arco armato richiede una valutazione complessiva del sistema strutturale, che comprende non solo la parte curva dell'arco ma anche i piedritti. In presenza di piedritti non adeguatamente contrastati da catene, contrafforti, archi rampanti o da una sufficiente compressione dei piani superiori, l'applicazione del rinforzo alla sola porzione arcuata può risultare inefficace o addirittura dannosa. In tali casi è necessario estendere il rinforzo fino alla base dei piedritti o collegarlo a strutture ritenute stabili, consolidando l'intero sistema arco-piedritti.

Numerose campagne sperimentali, condotte a partire dagli anni '90 su modelli in scala ridotta e su archi in laterizio a scala reale, hanno confermato l'efficacia della tecnica dell'arco armato per archi di diversa geometria (a tutto sesto, ribassati, policentrici, a sesto acuto, inclusi archi depressi). Le prove hanno evidenziato significativi incrementi del carico di collasso in presenza di carichi sia verticali che orizzontali, con risultati comparabili a quelli ottenuti mediante cappe in calcestruzzo armato, ma con un impatto molto inferiore (reversibilità) e senza incremento delle masse, aspetto estremamente vantaggioso nei confronti delle sollecitazioni sismiche. È stata inoltre osservata una relazione di proporzionalità lineare tra il carico di collasso e la forza di trazione imposta ai cavi, nonché una sostanziale equivalenza di efficacia tra applicazioni all'estradosso e all'intradosso.

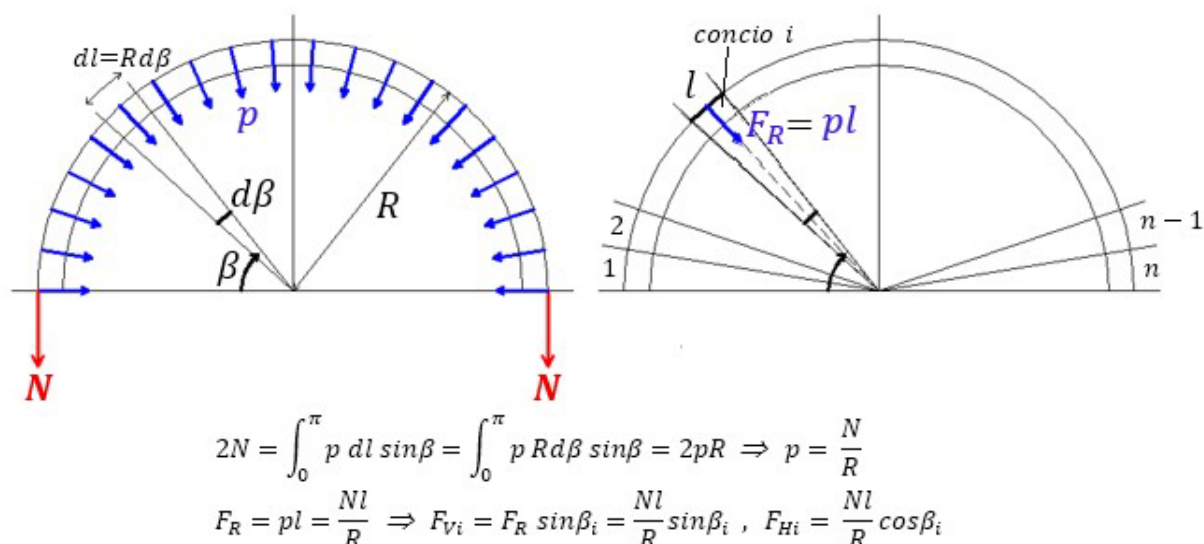


Fig. 4.4.3. Formulazione analitica del comportamento dell'“arco armato”

Per gli archi circolari, a tutto sesto, a sesto ribassato o a sesto acuto, il raggio di curvatura  $R$  coincide con il raggio della circonferenza nella posizione del cavo (estradosso o intradosso). Per l'arco ellittico viene considerato il raggio di curvatura dell'ellisse; per l'arco definito per punti è possibile fare riferimento al cerchio passante per 3 punti, considerando tre vertici consecutivi. La forza radiale agente sul concio  $i$ -esimo viene calcolata in base al tiro dei cavi in acciaio ( $N$ ) e ai valori locali del raggio di curvatura e della lunghezza del concio; segue la scomposizione in componente verticale e componente orizzontale. Per un arco circolare a tutto sesto, la sommatoria delle componenti verticali è pari a  $2N$  e quella delle componenti orizzontali è nulla.

#### • Rinforzo con catene

Uno specifico tipo di consolidamento statico e sismico degli archi in muratura consiste nel posizionamento di catene metalliche, soluzione adottata anche in passato sia per il collegamento tra le murature portanti, sia per l'eliminazione delle spinte delle strutture a volte o ad arco.

Nel procedimento numerico illustrato nel paragrafo §3, una catena viene tradotta nella presenza di un'ulteriore “biella” che, diversamente dalle “bielle” ideali (fig. 3.1.2) utilizzate per schematizzare i giunti, è di fatto una biella reale in grado sviluppare soltanto resistenza a trazione.

È quindi possibile, senza modifiche di rilievo agli algoritmi utilizzati, inserire catene e condurre la verifica di stabilità dell'arco.

Nel caso in cui, nel corso del procedimento numerico, lo sforzo nella catena risulti di compressione, occorrerà una compensazione, condotta secondo le tecniche già illustrate, per il suo annullamento (la catena non può reagire a compressione). A tale operazione corrisponde una iterazione aggiuntiva (così detta perché il numero delle iterazioni è strettamente connesso, come visto, al grado di iperstaticità, ma la compensazione dello sforzo nella catena non corrisponde alla perdita di iperstaticità e pertanto costituisce un passo aggiuntivo nel procedimento iterativo).

Ovviamente affinché i risultati siano accettabili occorre verificare che lo sforzo di trazione nella catena sia inferiore al limite di snervamento o comunque ad un limite di sforzo predefinito<sup>4.2</sup>.

<sup>4.2</sup> Una volta assicuratisi dell'efficacia della catena nei riguardi del collasso statico, occorre accertarsi che la catena resista anche nei confronti della crisi per collasso incrementale; la natura stessa del fenomeno sismico fa sì, infatti, che la catena sia sottoposta ad una serie molto numerosa di impulsi di trazione. Ognuno di questi può indurre una plasticizzazione; alla fine, la somma delle deformazioni plastiche può superare l'allungamento di rottura.

Da questa considerazione si trae che è preferibile realizzare le catene con acciaio di bassa resistenza ma alto allungamento, dimensionandone l'area con ampio margine, senza preoccuparsi eccessivamente dell'eventuale allentamento per viscosità o altre cause. Un grave errore sarebbe adoperare acciai incruditi, o peggio ancora funi di acciaio armonico. Considerazioni analoghe valgono per i cavi a collegamento delle murature.

## 5. ANALISI CON CEDIMENTI ALLE IMPOSTE

La teoria dell'analisi dei cedimenti proposta nella bibliografia di riferimento [A.3] [A.4] [D.1] è stata sviluppata, ai fini dell'implementazione nel software SAV, attraverso l'ingegnerizzazione degli algoritmi, con particolare riguardo alla procedura di ottimizzazione di ricerca della tripletta di cerniere soluzione del problema statico e cinematico e all'analisi del cedimento limite attraverso un moltiplicatore comune applicabile a singoli cedimenti.

### 5.1. TEORIA DEI CEDIMENTI ALLE IMPOSTE PER ARCHI RIGIDI

Si richiama in breve il procedimento risolutivo applicato all'arco nel rispetto della teoria di Heyman, illustrato nei paragrafi §2, §3. In sintesi, come mostrato in fig. 5.1.1, l'arco viene modellato con una sequenza di conci connessi fra loro da due bielle ortogonali all'interfaccia, una in intradosso e una in estradosso, capaci di reagire solo a compressione e non a trazione, ed una biella tangente che sostiene l'azione di taglio.

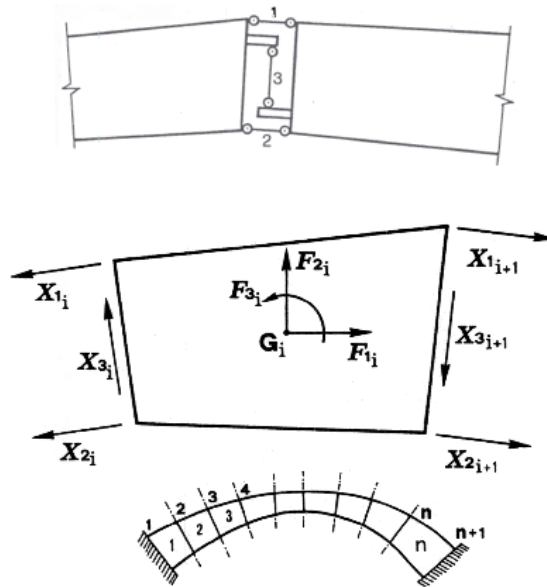


Fig. 5.1.1.

Viene impostato il sistema lineare che definisce l'equilibrio dell'arco, e che contiene 3 incognite sovrabbondanti. Invece che ricorrere alla congruenza, come accade nei problemi elastici di Scienza delle Costruzioni, essendo la struttura costituita da conci rigidi, la soluzione statica si individua applicando le condizioni al contorno specifiche del problema: l'impossibilità di trazione in intradosso e in estradosso si traduce nella condizione che la curva delle pressioni sia sempre interna alla sagoma della struttura, il che significa che in ogni biella ortogonale d'interfaccia è ammesso soltanto uno sforzo di compressione mentre la trazione deve essere annullata. Nelle interfacce dove una biella ha sforzo normale nullo, derivante dall'annullamento imposto, si è formata (al lato opposto) una cerniera.

Il metodo risolutivo dell'arco consiste nel controllare la curva delle pressioni e, applicando iterazioni successive, annullare lo sforzo normale nelle bielle che mostrano trazione, agendo ad ogni passo sulla biella maggiormente tesa. L'annullamento dello sforzo normale in una biella comporta la formazione della cerniera nella biella sul lato opposto.

Quando esiste una soluzione equilibrata compatibile con la condizione di curva delle pressioni non esterna, con formazione di non più di 3 cerniere alternate, l'arco si trova in equilibrio statico e risulta così definito un campo di sollecitazioni che può essere assunto, da un punto di vista ingegneristico, come riferimento per le verifiche di sicurezza (considerando opzionalmente anche verifiche a compressione e a taglio/attrito).

Nelle verifiche statiche e sismiche con moltiplicatore dei carichi, il valore massimo di tale moltiplicatore viene fissato dalla soglia di formazione della quarta cerniera alternata che origina il meccanismo: l'arco perde l'equilibrio, e si scompone in parti rigide che ruotano tra loro, costituendo un vero e proprio sistema articolato, cioè un cinematismo.

La procedura fin qui esaminata non considera la possibilità di un cedimento alle imposte.

Quando oltre al campo di carichi esterni agenti sull'arco vengono anche applicati cedimenti alle imposte, la procedura richiede alcune specifiche integrazioni.

Come è stato illustrato, per soli carichi esterni le incognite cinematiche, in condizioni di equilibrio, risultano ovunque nulle e quindi l'analisi della stabilità si limita al controllo della compatibilità tra la sagoma iniziale dell'arco e la curva delle pressioni. Nel caso di compresenza di cedimenti vincolari, tale controllo di compatibilità deve essere effettuato tra la curva delle pressioni e la configurazione variata dell'arco, funzione di incognite cinematiche (le rotazioni nelle cerniere) che dipendono sia dai cedimenti stessi sia dai carichi applicati.

Si consideri dunque un arco sottoposto ad una condizione di carico verticale, per la quale la struttura risulti "stabile", e ad una configurazione di cedimenti anelastici dei vincoli, che per semplicità si possono pensare concentrati nelle imposte.

Per effetto del cedimento (consistente in uno o più movimenti fra traslazione orizzontale, traslazione verticale e rotazione, ad una o ad entrambe le imposte) la struttura si trasforma da una configurazione tre volte iperstatica ad una isostatica: di conseguenza la curva delle pressioni diventa tangente in tre punti alla sagoma dell'arco. Si formano 3 cerniere delle quali si deve individuare la posizione.

La figura seguente illustra le condizioni statiche e cinematiche che vengono controllate per la soluzione strutturale dell'arco: la configurazione che rispetta l'equilibrio deve assicurare sia l'assenza di trazioni con annullamento delle forze nelle bielle ortogonali all'interfaccia che risultano tese (fig. 5.1.2.a dove le forze  $X_{1i}$  e  $X_{2i}$  si riferiscono alle bielle d'interfaccia), sia l'assenza di ogni compenetrazione di materiale nella direzione delle bielle ortogonali all'interfaccia interessate dalla forza di compressione (fig. 5.1.2.b) [A.3].

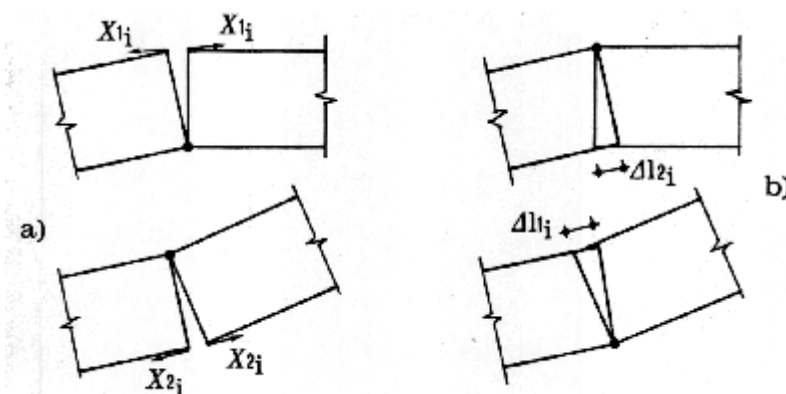


Fig. 5.1.2.

L'algoritmo risolutivo diviene il seguente:

**Fase 1.** Dati in input: arco, carichi statici esterni, cedimenti alle imposte.

**Fase 2.** Si individuano tutte le triplette di cerniere in grado di rispettare le condizioni richieste dal punto di vista cinematico (assenza di compenetrazione di materiale murario in corrispondenza delle bielle compresse). Se non esiste alcuna tripletta che rispetta la condizione cinematica, i cedimenti definiti in input non sono ammissibili e determinano un'impossibilità di equilibrio.

**Fase 3.** Fra tutte le triplette di cerniere individuate nella fase 2 si ricerca la tripletta in grado di soddisfare l'equilibrio con curva delle pressioni interna alla sagoma (e passante per le cerniere determinate dai cedimenti), facendo riferimento all'arco deformato. Se non esiste alcuna tripletta con tale proprietà, i carichi



definiti in input non sono ammissibili e determinano un'impossibilità di equilibrio.

Se invece la tripletta che soddisfa le condizioni cinematiche e statiche viene individuata, si assegnano all'arco le 3 cerniere che lo degradano da iperstatico a isostatico.

**Fase 4.** Sulla configurazione originaria dell'arco, modificata dall'inserimento delle 3 cerniere, è possibile condurre una normale analisi per il calcolo di un moltiplicatore statico (relativo a carichi verticali variabili) o sismico (relativo all'intensità delle forze sismiche); tale procedura è da considerarsi significativa nel caso di cedimenti di piccola entità rispetto alle dimensioni geometriche dell'arco. Come per ogni altra analisi condotta con l'algoritmo implementato in SAV, il moltiplicatore viene fissato dalla formazione della quarta cerniera oppure da una condizione non ammissibile (ad esempio, sforzo normale risultante di trazione in una interfaccia non soggetta a rinforzo).

**Analisi del cedimento limite.** Nel caso che il cedimento applicato non sia di piccola entità, è necessario esaminare l'equilibrio dell'arco nella configurazione geometrica variata. Questa procedura viene seguita nel corso dell'analisi del cedimento limite, quando, sottoponendo il cedimento ad un moltiplicatore crescente, viene ricercato il valore massimo del moltiplicatore (moltiplicatore di collasso) per il quale l'arco deformato non è più in equilibrio rispettando la curva delle pressioni interna alla geometria deformata dell'arco stesso.

L'analisi del cedimento limite è di fatto indipendente da successive analisi sismiche con moltiplicatore orizzontale delle forze gravitazionali: l'analisi sismica in SAV viene infatti condotta non nella configurazione deformata dell'arco, ma in quella originaria. Si tenga presente che l'analisi sismica può comunque essere condotta sull'arco affetto da una o più cerniere predefinite (in caso di 3 cerniere, queste potrebbero essere del tutto equivalenti alle cerniere prodotte da cedimenti delle imposte); in ogni caso, le forze orizzontali sismiche incrementali agiscono su concetti posti nella configurazione geometrica originaria.

Si osservi peraltro che in caso di cedimenti di entità rilevante (dell'ordine della decina di cm.), le analisi statica e sismica condotte sulla geometria originaria affetta dalle 3 cerniere dovute ai cedimenti acquistano un certo grado di convenzionalità. In casi di questo tipo gli effetti sismici sull'arco dovrebbero essere correlati non tanto all'effetto inerziale rappresentato da forze orizzontali agenti sull'arco stesso, ma alle sollecitazioni e deformazioni sismiche delle strutture su cui l'arco si imposta. Ad esempio, cedimenti che rappresentano una traslazione orizzontale delle imposte asincrona (allontanamento o avvicinamento reciproco contemporaneo) possono essere considerati rappresentativi di effetti sismici trasmessi all'arco dalle deformazioni delle strutture sulle quali l'arco si imposta.

Infatti, le pareti murarie dell'organismo edilizio da cui l'arco spicca possono vibrare in modo asincrono: si pensi ad esempio ad un arco impostato da una parte su una parete perimetrale e dall'altra su una parete interna. Le pareti interne sono maggiormente connesse all'organismo murario dell'edificio, e la vibrazione delle imposte dell'arco può avvenire in modo asincrono. L'allontanamento reciproco delle imposte può determinare una deformazione della volta tale da provocarne il crollo, specialmente in caso di volte sottili (meccanismi riscontrati nei recenti eventi sismici dell'Italia Centrale).

In tali casi l'analisi sismica dell'arco può svolgersi analizzando gli effetti inerziali non tanto sulle masse dell'arco stesso (studio dell'arco indeformato sottoposto a forze orizzontali crescenti), ma piuttosto sulle strutture che lo sostengono con conseguenti possibili movimenti asincroni delle imposte, valutandone le conseguenze sulla stabilità dell'arco.

Peraltro, si deve osservare che la relazione fra il valore limite di spostamento delle imposte e l'accelerazione sismica in input, aspetto da considerare per poter attribuire all'arco un indicatore di rischio sismico, è di difficile valutazione. L'arco e le pareti murarie su cui esso si imposta sono nella realtà un organismo unitario; disaccoppiando il comportamento, occorrerà una comparazione fra spostamenti e sollecitazioni delle due strutture per accertare che la capacità calcolata studiando la struttura muraria dell'edificio sia compatibile con la capacità dell'arco.

Ad esempio, condotta un'analisi pushover si possono estrarre informazioni sullo stato di deformazione e di

sollecitazione delle pareti su cui l'arco si imposta in corrispondenza del punto di funzionamento per SLV: la deformazione dovrà essere compatibile con il cedimento che l'arco può sostenere, mentre la sollecitazione (es. momento fuori piano) dovrà mostrare un margine di sicurezza tale da sostenere gli effetti ribaltanti prodotti dalla spinta dell'arco nella configurazione deformata.

E' ragionevole attendersi che i cedimenti sismici dovuti al comportamento elastoplastico dell'organismo murario, intesi come spostamenti delle imposte generati dal moto delle pareti su cui l'arco è costruito, siano di dimensioni contenute e quindi generalmente lontani dai valori limite, di ordine di grandezza inferiore rispetto a spostamenti di dimensioni più importanti che possono avere cause di altra natura (quali i cedimenti del terreno). Risulta evidente come ogni caso debba essere analizzato in modo specifico.

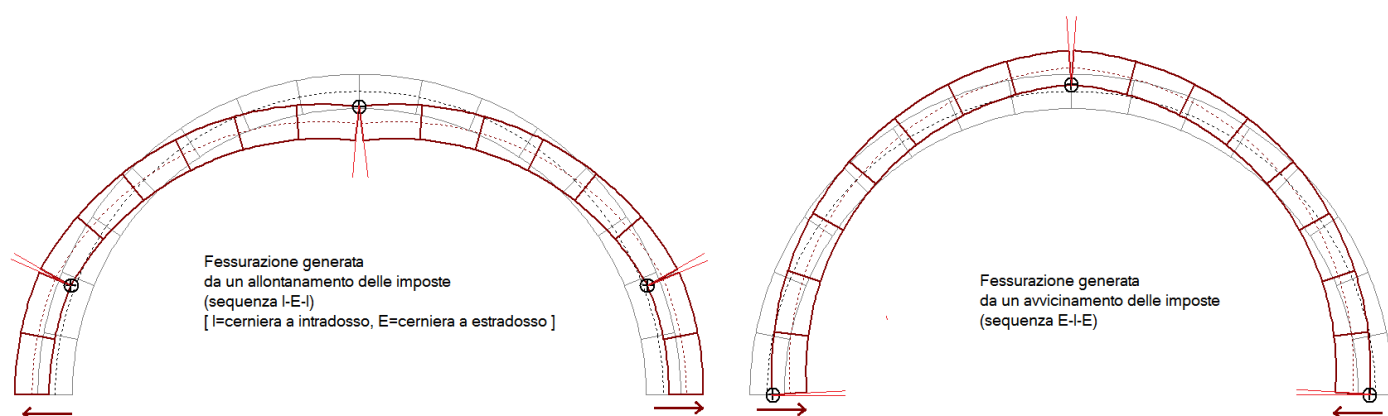


Fig. 5.1.3.

La **Fase 2.** dell'algoritmo presenta alcuni aspetti operativi particolarmente interessanti.

La ricerca delle triplette di cerniere cinematicamente ammissibili (in grado di assicurare l'assenza di compenetrazione di materiale compresso) può essere condotta con metodi di calcolo combinatorio [D.1], studiando tutte le possibili combinazioni di 3 cerniere su un sistema a  $m$  interfacce ( $m = N+1$ , con  $N$  = numero di conci dell'arco). E' noto che il numero di combinazioni generate da  $m$  interfacce prese 3 a 3, è fornito dalla relazione:

$$m! / [3! (m-3)!]$$

Ma ogni cerniera può essere posta in intradosso (I) o in estradosso (E) e quindi esistono 6 possibili sequenze lungo l'arco: I-E-I, E-I-E, I-E-E, I-I-E, E-E-I, E-I-I.

In definitiva, il numero delle combinazioni possibili è pari a (ricordando che  $3!=6$ ):

$$m! / (m-3)! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$$

Quindi ad esempio per un arco di 14 conci (vd. figura seguente) ( $m=N+1=15$ ) si hanno:

$$15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730 \text{ possibili triplette di cerniere.}$$

Il numero delle combinazioni cresce ovviamente in modo molto rapido con l'aumento del numero di conci: per un arco modellato con 30 conci si hanno  $31 \cdot 30 \cdot 29 = 26970$  combinazioni.

Per ognuna di queste triplette deve essere teoricamente controllata la condizione di ammissibilità cinematica con assenza di compenetrazione, e, in caso positivo, la condizione di equilibrio con curva delle pressioni interna alla sagoma dell'arco.

L'onerosità del calcolo può essere ridimensionata attraverso alcune opportune considerazioni, grazie anche ai risultati delle sperimentazioni.

Si faccia riferimento alla sequenza di cerniere a partire dall'imposta sinistra verso l'imposta destra.

In caso di cedimento consistente nella sola traslazione orizzontale verso l'esterno, la sequenza delle cerniere mostra l'alternanza: I-E-I (figura seguente), mentre il cedimento orizzontale verso l'interno genera la sequenza: E-I-E.



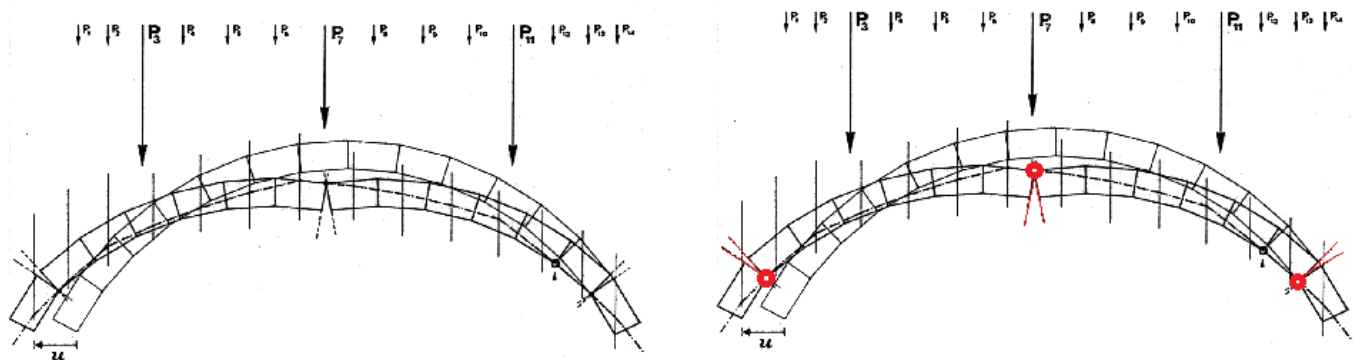


Fig. 5.1.4.

In caso di cedimento solo verticale verso il basso a destra, e verso l'alto a sinistra, l'arco mostra la sequenza: I-E-E.

In caso di cedimento solo verticale verso l'alto a destra, e verso il basso a sinistra, l'arco mostra la sequenza speculare: E-I-I.

Combinazioni generiche di cedimenti (traslazionali e rotazionali) possono generare sia le sequenze suddette, sia le altre rimanenti: I-I-E, E-I-I.

In base ai cedimenti in input, è quindi possibile effettuare una prima ricerca della tripletta in una particolare sequenza, estendendo la ricerca agli altri casi quando non si individua la soluzione.

La procedura implementata in SAV effettua inoltre un riordinamento delle triplette che assegna priorità a quelle caratterizzate da maggiore distanza tra le interfacce interessate dalle cerniere. Triplette con cerniere su interfacce adiacenti o vicine sono infatti meno probabili.

Con tali tecniche la ricerca dell'eventuale tripletta risolutiva viene condotta con tempi ottimizzati.

La tempistica di elaborazione per l'analisi dei cedimenti è fortemente condizionata dalle modalità di discretizzazione dell'arco: in generale è consigliabile modellare l'arco con un numero di conci non troppo elevato; eventuali raffinamenti possono essere eseguiti in approfondimenti successivi.

## 6. ANALISI ELASTICA (SLE)

L'analisi strutturale dei sistemi voltati è condotta in SAV applicando la teoria di Heyman, nell'ambito del Calcolo a Rottura, attraverso l'Analisi Limite. Vengono in tal modo studiati gli Stati Limite Ultimi (SLU:EQU in statica e SLV in sismica), con definizione dei moltiplicatori di collasso sia per carichi statici sia per carichi sismici e dei conseguenti indicatori di rischio, secondo le modalità illustrate nei paragrafi precedenti. All'analisi limite si affiancano l'analisi elastica (per lo studio degli stati limite di esercizio SLE) e l'analisi modale (per la definizione dei modi principali di vibrazione). Le analisi elastica e modale richiedono una modellazione alternativa a quella dell'analisi limite, dovendo chiamare in causa la deformazione attraverso i parametri elastici che descrivono il materiale. Le verifiche di capacità vengono in tal caso svolte in termini di sola resistenza, non essendo consentito in esercizio il raggiungimento di una condizione ultima di collasso.

L'analisi elastica in SAV, di tipo **non lineare con muratura non reagente a trazione** (secondo §8.4.2 CNR-DT 213), è finalizzata alle verifiche per **Stato Limite di Esercizio**, ed è condotta secondo un modello ad elementi finiti (FEM) monodimensionali aventi comportamento elastico lineare; la non linearità viene gestita attraverso la non resistenza a trazione e applicando un procedimento iterativo che corregge le proprietà statiche delle sezioni trasversali degli elementi sottoposti a verifica tensionale, riducendo la sezione geometrica iniziale alla sola parte reagente a compressione. Ad ogni passo del procedimento iterativo, il metodo ad elementi finiti esegue un'analisi elastica lineare con aggiornamento delle aree e dei momenti d'inerzia, e quindi delle rigidezze. La convergenza si considera raggiunta qualora le verifiche di sicurezza siano tutte soddisfatte<sup>6.1</sup>.

<sup>6.1</sup> I sistemi voltati studiati con SAV possono essere in muratura o calcestruzzo: nei paragrafi seguenti, quanto riferito alla muratura si considera in generale, e ove non diversamente specificato, estendibile alle strutture massicce in calcestruzzo semplice (fra cui rientrano i ponti in calcestruzzo massiccio, non armato o debolmente armato).

### 6.1. GENERALITA'

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è una generalizzazione del metodo matriciale degli spostamenti utilizzato nell'analisi strutturale. Il concetto basilare del FEM è che la struttura viene considerata come un assemblaggio di pezzi discreti, chiamati elementi, interconnessi in un numero finito di punti o nodi. Nei modelli monodimensionali, gli elementi sono le aste ed i nodi sono le connessioni fra le aste. Imponendo l'equilibrio ad ogni nodo, le matrici di rigidezza dei singoli elementi sono assemblate in un unico sistema di equazioni lineari che, risolto rispetto agli spostamenti nodali incogniti, fornisce le deformazioni e le sollecitazioni relative ad ogni singolo elemento; le deformazioni della struttura sono rappresentate dai movimenti dei nodi. Questi movimenti sono noti come gradi di libertà. I gradi di libertà sono le incognite dell'analisi e possono includere sia componenti traslazionali che rotazionali.

Il metodo degli elementi finiti può essere così riassunto:

- schematizzazione della struttura mediante nodi ed elementi;
- creazione della matrice di rigidezza di ogni singolo elemento utilizzato;
- assemblaggio e risoluzione del sistema lineare di equazioni di equilibrio globale ottenuto:  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$ , dove  $\mathbf{K}$  è la matrice delle rigidezze globale,  $\mathbf{u}$  è il vettore degli spostamenti incogniti ed  $\mathbf{F}$  è il vettore delle azioni nodali esterne. Trattandosi del metodo degli spostamenti, il numero delle incognite è tanto minore quanto più le strutture sono vincolate ossia tanto maggiore quanto più elevato è il numero dei movimenti indipendenti.

Una caratteristica delle analisi lineari è l'ipotesi di elasticità della struttura che rappresenta la proporzionalità indefinita fra forze e spostamenti.

Il modello utilizzato per l'analisi elastica lineare in SAV è un modello piano costituito da elementi finiti

monodimensionali: le aste corrispondono ai conci costituenti l'arcata (volta) e sono collegate tra loro da nodi definiti dai baricentri delle interfacce tra conci (fig. 6.1.1). Questa modellazione è prevista dalla normativa in §8.4 CNR-DT 213: modello bidimensionale, dove si indica che l'arcata può essere modellata con elementi trave ad asse rettilineo (i conci) (§8.4.2 CNR-DT 213).

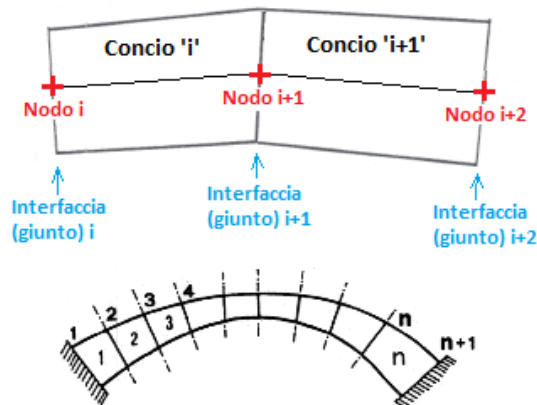


Fig. 6.1.1. Modellazione bidimensionale. Numerazioni dei nodi (interfacce = giunti) e delle aste (=conci)

I carichi applicati sull'arcata, definiti nel modello di SAV sui conci, vengono attribuiti ai nodi nel seguente modo: considerando l'arco modellato nel piano XZ, la forza verticale  $F_z$  a distanza  $d_x$  dal baricentro del concio equivale ad una forza verticale baricentrica  $F_z$  e ad un momento  $M_y$ ;  $F_z$  e  $M_y$  vengono scomposti in parti uguali ai due nodi iniziale e finale del concio; l'eventuale forza orizzontale  $F_x$ , applicata nel baricentro del concio, viene scomposta in due forze orizzontali tra loro uguali nel nodo iniziale e nel nodo finale del concio (fig. 6.1.2). Di conseguenza, nel nodo  $i$ -esimo (coincidente col nodo finale  $j$  del concio  $i-1$  precedente e col nodo iniziale  $i$  del concio  $i$  successivo) agisce la somma di due contributi di carico relativi ai due conci.

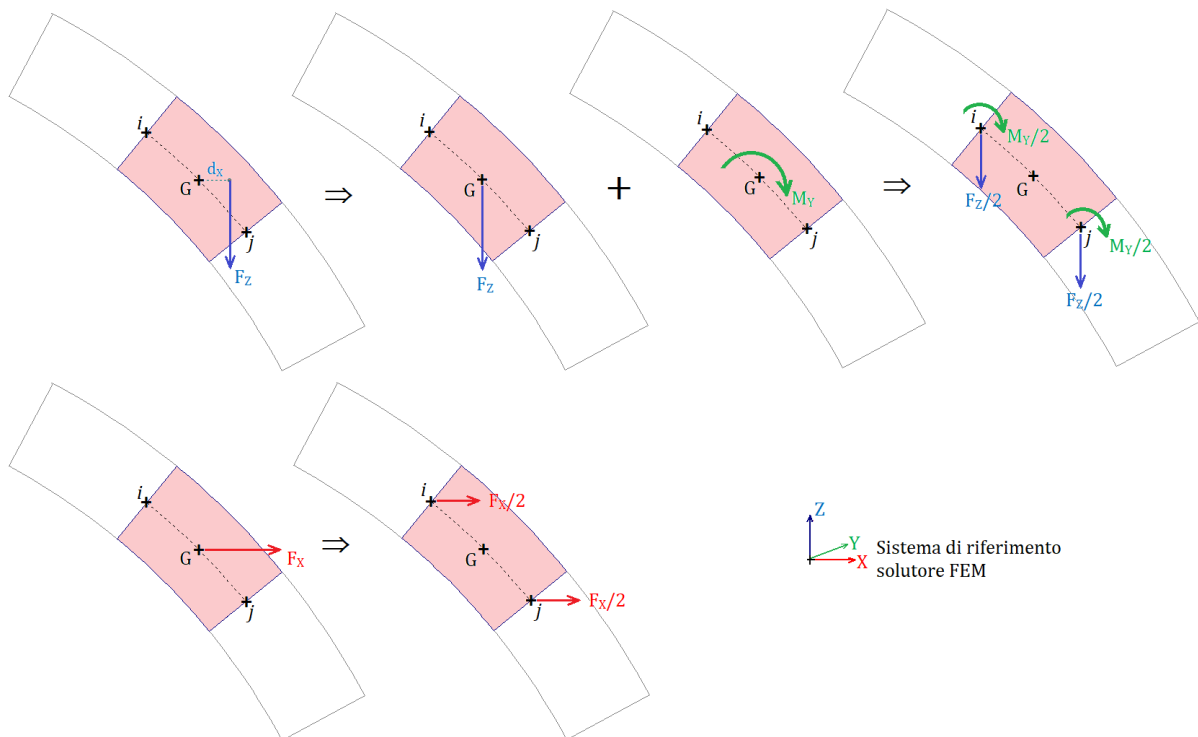


Fig. 6.1.2. Attribuzione dei carichi ai nodi nel modello FEM

Per quanto riguarda le convenzioni sui segni, in ambiente SAV la forza orizzontale  $X$  in input nelle CCE è positiva se verso destra, la forza verticale  $Z$  in input nelle CCE è positiva se verso il basso, il momento  $M_y$  generato da una forza verticale in posizione eccentrica rispetto al baricentro del concio è positivo se in senso orario.

Per il solutore FEM, il sistema di riferimento adottato richiede il cambiamento di segno alla forza verticale, mentre per la forza orizzontale ed il momento la convenzione è invariata (fig. 6.1.2).

In SAV una Volta può essere composta da uno o più archi affiancati, in cui la Volta viene suddivisa. Per ogni arco, SAV genera i carichi corrispondenti alle CCC da analizzare per SLE: in una data CCC si considerano - secondo i dati in input - una o più CCE (riconosciute in base al moltiplicatore non nullo: il moltiplicatore definito in SAV viene utilizzato per le combinazioni SLU, e se non nullo viene posto pari a 1 per la combinazione SLE). I carichi della CCC sono composti dall'assemblaggio dei carichi delle CCE considerate, ognuna delle quali è affetta dal proprio coefficiente di combinazione  $\psi_0$  definito in input, secondo la formulazione della Combinazione caratteristica impiegata per gli SLE ([2.5.2] in §2.5.3 NTC e §3.9 CNR-DT 213).

Alle aste vengono attribuiti i moduli di elasticità longitudinale e tangenziale della muratura definiti nei dati della volta.

## 6.2. STATO LIMITE DI ESERCIZIO

Lo Stato Limite di Esercizio (SLE) viene regolato da NTC e, con particolare riferimento alle strutture ad arco in muratura, da CNR-DT 213. In §3.5.2 CNR-DT 213 si afferma quanto segue:

*"Considerato il particolare comportamento del "materiale muratura", come unico Stato Limite di Esercizio si assume l'attingimento in una qualsiasi parte della struttura di una misura di intensità limite ammissibile dello stato tensionale, coniugato con la verifica della ammissibilità di spostamenti e fessurazioni. La verifica nei confronti di siffatto S.L. si assume prevenga tutte le situazioni di SLE previste dalle NTC, salvo la verifica di spostamenti e fessurazioni che possano compromettere l'utilizzo e/o la durata del ponte. Per il dettaglio della verifica nei confronti dello SLE, si rimanda ai Capp. 8 e 9 delle presenti Istruzioni".*

In §8.8 CNR-DT 213 si forniscono le specifiche per l'esecuzione dell'analisi per SLE, ed in particolare si precisa che i metodi di verifica ammessi sono: analisi strutturale elastica lineare (§8.4.1 CNR-DT 213), analisi strutturale elastica non lineare (§8.4.2 CNR-DT 213), analisi strutturale anelastica (§8.4.3 CNR-DT 213), mentre il metodo di calcolo a rottura (analisi limite, §8.4.4 CNR-DT 213) è riservato agli stati limite ultimi.

Per quanto riguarda l'obbligatorietà delle verifiche per SLE, le norme CNR-DT 213 in §3.5.3: Stati Limite di riferimento per il controllo della sicurezza strutturale, si esprimono nel seguente modo:

*"Pur se il par. 4.5.6.3.NTC2008 consente di omettere, per le strutture murarie, la verifica per lo Stato Limite di Esercizio, si ritiene che la struttura debba essere controllata:*

- a) per gli Stati Limite Ultimi di Perdita di Equilibrio (EQU) e di Salvaguardia della Vita;*
- b) per lo Stato Limite di Esercizio (SLE), assimilato allo Stato Limite di Danno (SLD)."*

Pertanto, le CNR suggeriscono l'opportunità di eseguire verifiche per SLE.

Nel 2022 sono state pubblicate le Linee guida per la Classificazione e gestione del rischio, la valutazione della sicurezza ed il monitoraggio dei ponti esistenti (LG 2022), che definiscono le situazioni in cui la verifica per SLE è da considerarsi obbligatoria: si tratta dei ponti in muratura che ricadono in Classe IV (in §2.3.3.2 NTC vengono definiti i ponti in Classe d'uso IV come ponti di importanza critica per il mantenimento delle vie di comunicazione, particolarmente dopo un evento sismico). L'obbligatorietà è espressa al punto §6.3.5.3 LG 2022 (Situazioni che richiedono lo svolgimento delle verifiche di esercizio):

*"Le verifiche agli Stati Limite di Esercizio sono regolate dal punto 8.3 delle Norme Tecniche:*

*La valutazione della sicurezza e la progettazione degli interventi sulle costruzioni esistenti potranno essere eseguite con riferimento ai soli SLU, salvo che per le costruzioni in classe d'uso IV, per le quali sono richieste*

*anche le verifiche agli SLE specificate al §7.3.6; in quest'ultimo caso potranno essere adottati livelli prestazionali ridotti."*

Per SLE, SAV fa riferimento all'analisi elastica non lineare, seguendo quanto illustrato in §8.4.2 CNR-DT 213: la soluzione equilibrata e congruente viene ricercata in assenza di trazione nel materiale (muratura non reagente a trazione) e in presenza di uno stato di fessurazione dipendente dalle sollecitazioni agenti. Il materiale viene supposto indefinitamente elastico a compressione, con verifica della ammissibilità della tensione massima di compressione. E' necessario inoltre eseguire le verifiche a taglio, e definire l'ampiezza delle fessurazioni. Nel corso del procedimento di calcolo, attraverso l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, viene definito lo stato di deformazione ed è quindi possibile calcolare l'ampiezza delle lesioni in condizioni di esercizio.

### 6.3. RISULTATI DELLE VERIFICHE DI SICUREZZA

Sotto l'azione di un campo di sollecitazioni ottenuto al generico passo dell'analisi elastica non lineare, condotta con rigidzze secanti determinate dallo stato di parzializzazione delle sezioni al passo corrente, le verifiche di sicurezza sono le seguenti.

**a) Verifica a compressione:** la tensione massima di compressione deve essere inferiore al limite di ammissibilità, come specificata da §8.4 CNR-DT 213.

#### *Resistenze di calcolo*

Per gli stati limite di esercizio, §4.1.2.2.5.1 NTC specifica che la tensione massima di compressione nel calcestruzzo, per combinazione caratteristica, deve essere non superiore a  $0.60 f_{ck}$  e pertanto questo è il limite ammissibile nelle verifiche SLE. Per analogia, per le strutture in muratura si considera il limite  $0.60 f_{m,i}$ ; tuttavia, poiché la resistenza di progetto della muratura viene  $f_{md}$  viene calcolata (per le verifiche SLU) a partire dalla resistenza della muratura  $f_m$  divisa per il coefficiente parziale di sicurezza  $\gamma_M$ , per il fattore di confidenza  $F_C$  (calibrato sulla conformità della struttura alla regola d'arte) e per il fattore di degrado  $\gamma_D$ , poiché tale limite può essere più sfavorevole rispetto a  $0.60 f_{m,i}$ , in SAV si adotta come limite ammissibile per la compressione nella muratura il minimo fra le due espressioni.

Per quanto riguarda i rinforzi: nel caso di acciaio (catena, armatura di cappa in estradosso o in intradosso), sia per sistemi in calcestruzzo che in muratura, si segue quanto indicato in §4.1.2.2.5.2 NTC per l'acciaio: la tensione massima in condizioni di esercizio non può superare  $0.80 f_{yk}$ .

Nel caso di rinforzi in composito, per FRCC in §5.1.2 CNR-DT 215 (Verifica allo SLE) si specifica che sotto i carichi di esercizio la tensione massima dell'acciaio nelle armature tese non può eccedere l'80% della corrispondente tensione di progetto (dato in input). Questa limitazione viene estesa ai compositi in FRP.

#### *Modalità di verifica*

Per sezione tutta compressa (interamente reagente: eccentricità  $e=M/N \leq h/6$ , ossia:  $\eta = (e/h) \leq 1/6$ , essendo  $h$  l'altezza della sezione di verifica (il giunto)), con curva delle pressioni interna al fuso corrispondente al nocciolo d'inerzia, la verifica con le formule elastiche fornisce la tensione di compressione massima.

Se la curva delle pressioni è esterna al fuso ( $\eta > 1/6$ ) ma interna all'arco ( $\eta < 1/2$ ), la sezione è parzializzata, con una zona compressa e una zona non reagente. La tensione di compressione massima si calcola in tal caso con un diagramma di tensione triangolare in equilibrio con lo sforzo normale eccentrico.

Si definisce *Coefficiente di Sicurezza a compressione* il rapporto  $(f_{md} / \sigma_{c,max})$ . La verifica di sicurezza è soddisfatta quando tale rapporto è  $\geq 1$ .

Nell'ambito dei controlli sulla compressione, §8.4.1 CNR-DT 213 richiede inoltre l'accertamento dell'esistenza di campi di tensione equilibrati di pura compressione, ossia di sezioni interamente reagenti.

**b) Verifica di estensione della zona reagente:** sui giunti di malta si deve riscontrare compressione su almeno l'80% della estensione del giunto (l'estensione del giunto è pari all'altezza geometrica  $h$  della sezione), o equivalentemente la zona tesa  $z$ , non nulla in caso di parzializzazione, non può eccedere il 20% della sezione geometrica. Questa indicazione è ripresa dal punto §8.4.1 CNR-DT 213 relativo all'analisi elastica lineare, e può essere considerata valida anche per il generico passo dell'analisi elastica non lineare (in §8.8 CNR-DT 213 si specifica che, qualunque sia l'analisi adottata per SLE, si deve accertare l'ammissibilità nei confronti delle condizioni limite associate ai meccanismi di deformazione anelastica di cui al punto §8.4.1 CNR-DT 213: facendo riferimento a tale punto, la verifica di sicurezza richiede, oltre alla verifica di compressione e a quella di taglio, anche il controllo sull'estensione della zona reagente). In SAV un apposito parametro di calcolo determina se questa verifica condiziona il giudizio sulla sicurezza.

Si definisce *Coefficiente di Sicurezza per estensione di zona reagente* il rapporto  $(0.2 \cdot h/z)$ . La verifica di sicurezza è soddisfatta quando tale rapporto è  $\geq 1$ . Ovviamente, nel caso in cui la sezione sia interamente reagente, questa verifica è automaticamente soddisfatta ed il coefficiente di sicurezza viene indicato come  $>>1$ .

**c) Verifica a taglio:** la tensione tangenziale media sul giunto deve soddisfare la relazione:  $|\tau| \leq f |\sigma_n|$  dove  $f$  è un adeguato valore del coefficiente di attrito,  $\tau$  è la tensione tangenziale media, e  $\sigma_n$  è la tensione media di compressione sul giunto; si assume  $f=0.5$  (corrispondente a un angolo di attrito pari a  $26^\circ,56$ ). La tensione tangenziale media è data dalla sollecitazione di taglio divisa per l'area della sezione, con la tensione di compressione media  $\sigma_n$  ottenuta dividendo lo sforzo normale per la zona reagente a compressione (in §7.8.2.2 NTC si specifica che la resistenza a taglio si calcola con riferimento alla tensione normale media sulla parte compressa della sezione).

Si definisce *Coefficiente di Sicurezza per taglio* il rapporto  $(0.5 \cdot \sigma_n/\tau)$ . La verifica di sicurezza è soddisfatta quando tale rapporto è  $\geq 1$ . Nelle sezioni di taglio nullo questa verifica è automaticamente soddisfatta ed il coefficiente di sicurezza viene indicato come  $>>1$ .

**d) Verifica di equilibrio:** in §8.4.2 CNR-DT 213 si specifica che l'esistenza di una soluzione equilibrata e congruente in assenza di resistenza a trazione del materiale e in coesistenza con uno stato di fessurazione del materiale, richiede come presupposto la stabilità del ponte, in quanto in caso contrario la struttura è a rischio di collasso per meccanismo cinematico, e quindi non può comunque superare alcuna verifica né valutazione di sicurezza. Questo requisito è fondamentale nel caso in cui l'analisi elastica non lineare venga utilizzata per la verifica allo stato limite ultimo SLU.

Il software SAV adotta per SLU l'analisi limite (calcolo a rottura) e per SLE l'analisi elastica non lineare. In SLU la stabilità dell'arco è garantita anche in caso di formazione di cerniere, purché la loro disposizione sia tale da non generare un meccanismo di collasso. Nelle sezioni dove si formano le cerniere la curva delle pressioni è tangente in intradosso o in estradosso, con tensione locale di compressione teoricamente infinita (in realtà, limitata dalla zona fisica di formazione della cerniera, che non è 'puntuale' ma interessa una seppur piccola porzione di sezione).

Per gli archi in muratura non rinforzati, in SLE non è accettabile la formazione di alcuna cerniera, perché ciò corrisponderebbe a una tensione di compressione teoricamente infinita (comunque molto elevata) e pertanto non in grado di soddisfare la verifica a compressione. In tal senso, la verifica di stabilità dell'arco in SLE è intrinseca alla verifica a compressione. SAV tuttavia indica esplicitamente le sezioni dove la curva delle pressioni è tangente all'estradosso o intradosso ( $\eta=1/2$ ) o addirittura fuoriesce dalla sagoma geometrica dell'arco ( $\eta>1/2$ ): queste configurazioni vengono segnalate come violazione dell'equilibrio.

In presenza di rinforzi resistenti a trazione sulla superficie tesa, la curva delle pressioni può fuoriuscire dal profilo dell'arco, come descritto al punto seguente.

### **Rinforzi con elementi resistenti a trazione (cappa in c.a., compositi)**

In presenza di rinforzi, nel caso di sezione parzializzata, con curva delle pressioni interna o esterna rispetto

all'arco, la sezione viene studiata con un diagramma lineare delle tensioni di compressione in equilibrio con lo sforzo di trazione nel rinforzo.

Vengono utilizzate le note formule della pressoflessione per il c.a., che utilizzano le due equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione e l'equazione tensionale corrispondente all'elasticità applicata al principio di conservazione delle sezioni piane. Ne deriva un'equazione di terzo grado.

Nel **calcolo di verifica**, nota l'area del rinforzo e le sollecitazioni di progetto (N,M), si determinano la posizione  $x$  dell'asse neutro e le tensioni di compressione nella muratura e di trazione nel rinforzo. Le verifiche di sicurezza per compressione e per trazione sono soddisfatte se risultano inferiori alle resistenze di progetto.

Nel **calcolo di progetto**, la tensione nel rinforzo è nota ed è posta pari alla resistenza di progetto (ad esempio, pari alla tensione di snervamento nelle barre della rete e.s. nel caso di rinforzo con cappa armata in calcestruzzo), e si calcolano la posizione dell'asse neutro  $x$ , la tensione nella muratura e l'area del rinforzo, area strettamente necessaria per soddisfare la verifica di sicurezza.

Oltre alle verifiche sopra elencate, deve inoltre essere valutata l'**ampiezza delle lesioni** derivanti dal calcolo.

Nelle zone tese si prevede l'apertura di lesioni valutabili attraverso la relazione:  $\Delta_e = (1/\gamma_h) \cdot \varepsilon_{fm} \cdot d$  ((8.4) in §8.4.2 CNR-DT 213), dove  $\varepsilon_{fm}$  è la deformazione massima di trazione, determinata secondo la distribuzione lineare delle deformazioni (per conservazione delle sezioni piane):  $\varepsilon_{fm}/z = \varepsilon_{fc}/(h-z)$ , dove:

$\varepsilon_{fc}$  è la deformazione tensione massima di compressione, pari a  $\sigma_{c,max}/E_m$  con:

$\sigma_{c,max}$  tensione massima di compressione,  $E_m$  modulo elastico della muratura;

$z$  è la zona tesa,  $h$  l'altezza geometrica della sezione e  $(h-z)$  la zona reagente a compressione;

$d$  è l'estensione della zona fessurata, definita dalla sequenza consecutiva di conci interessati da fessurazione sulla stessa superficie dell'arco (in intradosso oppure in estradosso);

$\gamma_h = 1.5$ .

La ampiezza della lesione eventualmente osservata determina il superamento della soglia di allarme allorché superi il valore:

$$\Delta_{0e} = \gamma_h \Delta_e.$$

Per quanto riguarda i **moduli di elasticità**, nelle analisi elastiche lineari in generale viene fatto riferimento ai valori medi, come specificato in §4.1.1.1 NTC per gli elementi in calcestruzzo: in assenza di indicazioni specifiche per la muratura, il riferimento ai valori medi si può ritenere valido anche per gli elementi strutturali in muratura (i valori medi dei moduli elastici sono peraltro normalmente assunti per i livelli di conoscenza LC1 e LC2). In SAV sono inoltre previste due possibili riduzioni dei valori di riferimento dei moduli elastici, con riguardo ai seguenti due aspetti.

### (1) Rigidezze fessurate

Nelle analisi elastiche lineari in condizioni statiche NTC non prevede riduzioni dei moduli di elasticità a causa delle condizioni fessurate, tranne il caso degli elementi in calcestruzzo per la determinazione degli effetti delle deformazioni termiche, degli eventuali cedimenti e del ritiro, per i quali negli stati limite di esercizio si devono assumere rigidezze intermedie tra quelle delle sezioni interamente reagenti e quelle delle sezioni fessurate, essendo queste ultime assunte pari alla metà di quelle delle sezioni interamente reagenti (§4.1.1.1 NTC): ciò equivale ad una riduzione del 25% dei moduli elastici.

Per tenere conto in SLE delle condizioni fessurate che possono caratterizzare gli archi in muratura, SAV consente opzionalmente tale riduzione; tuttavia, si deve considerare che il procedimento non lineare di SAV può determinare la riduzione delle rigidezze attraverso il calcolo e in linea di principio non è necessario ridurre i moduli elastici per tener conto della fessurazione. La riduzione è comunque consigliabile qualora si decida di considerare soltanto il primo passo dell'analisi elastica non lineare, metodo equivalente all'esecuzione dell'analisi lineare senza correzioni di rigidezze, oppure la convergenza ottenuta in caso di verifiche di sicurezza tutte soddisfatte si riferisca al passo iniziale dell'analisi.

## **(2) Fattore di confidenza $F_c$**

Secondo quanto indicato in §C8.5.4 NTC: "I fattori di confidenza sono utilizzati per la riduzione dei valori dei parametri meccanici dei materiali. (...)". In SAV  $F_c$  può essere applicato, oltre ai parametri di resistenza, anche ai moduli elastici.

### **Algoritmo implementato in SAV**

**0.** Si definisce il modello piano FEM dell'arco costituito da aste (corrispondenti ai conci) e nodi (corrispondenti alle interfacce tra conci, cioè ai giunti), carichi applicati nei nodi, materiale murario e vincoli (incastri alle imposte). Tutte le sezioni trasversali dell'arco (corrispondenti alle interfacce tra conci, cioè ai giunti) sono considerate interamente reagenti.

Per ogni arco ideale in cui il sistema voltato è suddiviso e per ognuna delle Combinazioni di Condizioni di Carico CCC da analizzare per SLE (CCC di tipo SLE), si applica la procedura descritta nei seguenti passi:

**1.** Esecuzione dell'analisi elastica lineare: si determina lo stato di sollecitazione e di deformazione della struttura.

**2.** Verifiche di sicurezza: utilizzando le caratteristiche di sollecitazione N,M,T si eseguono le verifiche di compressione, di estensione della zona reagente e di taglio, definendo i corrispondenti coefficienti di sicurezza.

**3.** Se tutte le sezioni sono interamente reagenti, oppure se tutte le verifiche di sicurezza sono soddisfatte, la convergenza del metodo è ottenuta: l'analisi è terminata e si procede con il punto 6.

Altrimenti, per le sezioni parzializzate si correggono i parametri statici sostituendo alla sezione geometrica la sezione reagente, definendo in tal modo rigidezze aggiornate.

**4.** Si eseguono nuovamente l'analisi elastica lineare e le conseguenti verifiche di sicurezza.

**5.** Se le zone reagenti determinate dalle verifiche coincidono con le sezioni parzializzate utilizzate per il calcolo delle rigidezze, il procedimento iterativo è giunto a convergenza e termina: si procede con il punto 6. Altrimenti, l'analisi termina se tutte le verifiche di sicurezza sono soddisfatte.

Altrimenti, per le sezioni parzializzate si correggono i parametri statici sostituendo alla sezione geometrica la sezione reagente, aggiornando così le rigidezze delle aste del modello, e si torna al punto 4. Prima di tornare al punto 4. si controlla ovviamente il raggiungimento del massimo numero di iterazioni previsto dalle impostazioni dell'analisi elastica non lineare.

**6.** I risultati in termini di sollecitazioni e deformazioni, inclusi gli spostamenti dei nodi, le corrispondenti verifiche di sicurezza ed il calcolo dell'ampiezza delle lesioni costituiscono i risultati finali dell'analisi elastica non lineare.



## 7. ANALISI MODALE

Le strutture voltate sono sistemi di antica concezione e realizzazione, frequentemente danneggiati dagli eventi subiti nel corso della loro vita, in particolare per effetto delle azioni sismiche. Le tecniche di riparazione e di rinforzo sono finalizzate a ripristinare e se necessario implementare le capacità originarie. Le proprietà dinamiche dei sistemi voltati, determinate attraverso l'analisi modale, assumono un ruolo significativo in relazione a diversi stati della struttura:

- la configurazione originaria;
- lo stato danneggiato per effetto di un evento statico o sismico sfavorevole;
- lo stato rinforzato a seguito di un intervento di consolidamento.

Indagini sperimentali e analitiche mostrano che il rinforzo con materiale composito è in grado di ristabilire il comportamento dinamico originario di volte danneggiate. Il ripristino si consegue senza la modifica delle condizioni di vincolo e senza l'incremento dei carichi permanenti, a differenza di tecniche tradizionali quali la realizzazione di una cappa in calcestruzzo.

Lo studio delle proprietà dinamiche delle volte viene condotto valutando attraverso l'analisi modale: le caratteristiche originarie di un sistema voltato e nel caso di lesioni quelle legate allo stato di danneggiamento; per i progetti di consolidamento: le proprietà implementate attraverso l'applicazione di un intervento, frequentemente un rinforzo in composito.

Facendo riferimento a opere del settore [E.1] [E.2], è stata condotta con SAV un'indagine dove il confronto fra i risultati sperimentali e quelli analitici ha mostrato valori delle frequenze e delle loro variazioni sostanzialmente simili, evidenziando che rispetto alla volta integra originaria lo stato di danneggiamento comporta una riduzione della frequenza e che è possibile conseguire un ripristino della rigidezza originaria progettando un rinforzo con materiali compositi.

Si è infine constatato come l'intervento di rinforzo con compositi risulta preferibile alla classica realizzazione di una cappa in calcestruzzo, il cui effetto di irrigidimento eccessivo contrasta con le esigenze di ripristino delle capacità e potrebbe introdurre nel comportamento dinamico modifiche tali da alterare la concezione originaria della struttura e la sua modalità di risposta alla sollecitazione sismica.

L'analisi modale assume dunque un'importanza significativa per lo studio del comportamento strutturale dei sistemi voltati. Nell'implementazione di SAV, essa consiste nel calcolo dei modi propri di vibrare (periodi e corrispondenti deformate modale), elaborati su modello elastico riferito alle masse corrispondenti agli stati limite considerati: SLE per analisi elastica, SLU: EQU per analisi statica, SLU: SLV per analisi sismica, in condizione integre o fessurate.

La modellazione della struttura ad arco è condotta in modo del tutto analogo all'Analisi elastica, secondo un modello ad elementi finiti (FEM) monodimensionali aventi comportamento elastico lineare.

Il vincolamento alle imposte può essere incastro, cerniera o semincastro, con grado di incastro intermedio. Nell'analisi elastica, SAV gestisce la non linearità attraverso la non resistenza a trazione, applicando un procedimento iterativo che corregge le proprietà statiche delle sezioni trasversali degli elementi sottoposti a verifica tensionale, riducendo la sezione geometrica iniziale alla sola parte reagente a compressione, fino a determinare, se possibile, la convergenza in corrispondenza di verifiche di sicurezza soddisfatte. Risulta così determinato un arco reagente, corrispondente alla parte strutturale che contiene il flusso delle tensioni di compressione.

Nell'analisi limite, SAV risolve la struttura in campo statico (SLU: EQU) o sismico (SLU: SLV) con riferimento al modello rigido-fragile, ed in corrispondenza di una data soluzione statica è possibile definire un campo di fessurazioni determinate dall'arco reagente.

## 7.1. METODOLOGIA DI ANALISI

L'analisi modale in SAV può essere eseguita, secondo l'opzione scelta in input, in una delle due seguenti modalità:

- elastica, con struttura integra, completamente reagente;
- fessurata, con riferimento all'arco reagente, ossia alle sezioni geometriche ridotte considerando la sola parte reagente a compressione e quindi, a parità di masse, con rigidezze ridotte. Per ogni stato limite considerato e per ogni arco ideale e Combinazione di Condizioni di Carico esaminati, l'arco reagente è quello determinato dalla corrispondente configurazione di sollecitazione elaborata dall'analisi.

Si richiama la schematizzazione già presentata in §6 per l'analisi elastica.

Nella modellazione FEM la struttura viene considerata come un assemblaggio di pezzi discreti, chiamati elementi, interconnessi in un numero finito di punti o nodi. Nei modelli monodimensionali, gli elementi sono le aste ed i nodi sono le connessioni fra le aste.

Il modello utilizzato per l'analisi modale in SAV, analogo al modello dell'analisi elastica, è un modello piano costituito da elementi finiti monodimensionali: le aste corrispondono ai conci costituenti l'arcata (volta) e sono collegate tra loro da nodi definiti dai baricentri delle interfacce tra conci (fig. 7.1.1). Questa modellazione è prevista dalla normativa (§8.4 CNR-DT 213: modello bidimensionale) dove si indica che l'arcata può essere modellata con elementi trave ad asse rettilineo (i conci) (§8.4.2 CNR-DT 213).

In analisi modale viene costruita una matrice di rigidezza globale assemblando le matrici di rigidezza dei singoli elementi, mentre le masse agenti vengono concentrate nei nodi e corrispondono ai carichi verticali gravitazionali. I gradi di libertà dinamici corrispondono ai movimenti dei nodi, e nel modello piano 2D (piano XZ contenente il piano medio della volta) consistono nelle traslazioni secondo gli assi di riferimento: X e Z.

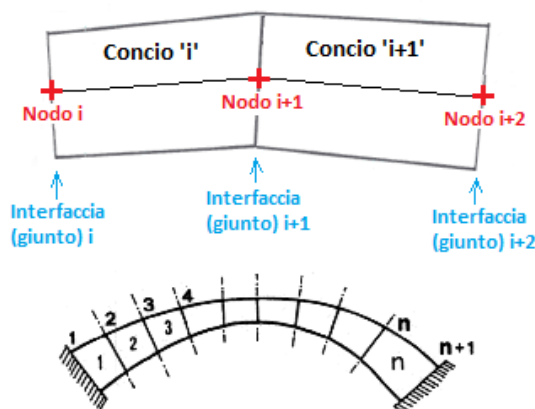


Fig. 7.1.1. Modellazione bidimensionale. Numerazioni dei nodi (interfacce = giunti) e delle aste (=conci)

In sintesi, l'analisi modale condotta con il metodo degli elementi finiti consiste nei seguenti passi:

- schematizzazione della struttura mediante nodi ed elementi;
- creazione della matrice di rigidezza di ogni singolo elemento ('asta') utilizzato;
- assemblaggio delle matrici di rigidezza delle aste nella matrice di rigidezza globale:  $\mathbf{K}$ ;
- definizione delle masse concentrate nodali corrispondenti ai carichi verticali distribuiti e concentrati di tipo gravitazionale;
- assemblaggio delle masse nodali nella matrice di massa globale  $\mathbf{M}$ ;
- risoluzione del problema generalizzato agli autovalori e autovettori:  $\mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$  con determinazione dei modi di vibrare, dove  $\omega$  è la pulsazione (autovalore) e  $\mathbf{x}$  il corrispondente autovettore (deformata modale).

Più in dettaglio, lo studio delle vibrazioni libere di un sistema strutturale viene formulato nel modo

seguente.

Considerando un sistema ad un solo grado di libertà, caratterizzato da: massa  $m$ , costante elastica  $k$ , spostamento  $u$ , la forza d'inerzia  $m\ddot{u}$  deve essere in equilibrio con la forza elastica  $ku$ , pertanto:  
 $m\ddot{u} + ku = 0$ , ovvero:  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ , dove:  $\omega = \sqrt{K/m}$  è la pulsazione di questo sistema di vibrazioni libere.  
La soluzione dell'equazione è data da:  $u = \dot{u}_0/\omega \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$ , dove  $u_0$  e  $\dot{u}_0$  sono rispettivamente lo spostamento e la velocità iniziali. Il periodo del moto armonico è:  $T = 2\pi/\omega$ .

Nel caso di un sistema a  $N$  gradi di libertà, per determinare i periodi propri e le forme modali l'equazione di moto diviene:

$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0$ , con  $\mathbf{M}$  matrice di massa,  $\mathbf{K}$  matrice di rigidezza,  $\mathbf{u}$  vettore degli spostamenti.

La soluzione è data dal moto armonico semplice:  $\mathbf{u} = \mathbf{x} \sin \omega t$ , dove  $\mathbf{x}$  è il vettore con le ampiezze di vibrazione.

Segue:  $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{x} \sin \omega t$ , e l'equazione di moto diviene:

$\mathbf{K} \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = 0$ , ossia:  $\mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$ :

questa equazione ammette valori non tutti nulli di  $\mathbf{x}$  se e solo se il determinante dei coefficienti si annulla:  $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ . La soluzione di questa equazione fornisce i valori  $\omega_i$  delle frequenze proprie del sistema (autovalori) ( $i=1, \dots, N$ ) e quindi i corrispondenti periodi propri  $= 2\pi/\omega_i$ . Ad ogni periodo è associato un vettore  $\mathbf{x}^{(i)}$  (autovettore) che, a meno di una costante, definisce la forma modale dell' $i$ -esimo modo proprio di vibrare del sistema strutturale.

Il metodo risolutivo del problema agli autovalori implementato in SAV è il metodo SubSpace Iteration (iterazione nel sottospazio); per i dettagli teorici sul metodo si rinvia ai testi specializzati sulla dinamica delle strutture. Dal punto di vista informatico è stato fatto riferimento alle librerie Lapack

(<https://www.netlib.org/>), in uso da tempo e contenenti algoritmi testati dalla comunità scientifica, in grado di assicurare precisione e stabilità numerica.

L'analisi modale viene completata con la definizione dei coefficienti di partecipazione modale  $\mathbf{g}^{(i)}$  e della massa modale efficace  $\mathbf{M}^{(i)}$ . Considerando il modello piano dell'arco (posto nel piano XZ), con masse  $M_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), per il modo  $i$ -esimo, indicando con  $(x_j^{(i)}, z_j^{(i)})$  le componenti secondo X e Z di  $\mathbf{x}^{(i)}$ , si definiscono:  $M_i^* = \sum (M_j x_j^{(i)2}) + \sum (M_j z_j^{(i)2})$ , e le seguenti grandezze:

coefficienti di partecipazione:  $g_x^{(i)} = \sum (M_j x_j^{(i)2}) / M_i^*$ ,  $g_z^{(i)} = \sum (M_j z_j^{(i)2}) / M_i^*$

masse modali efficaci:  $M_x^{(i)} = [\sum (M_j x_j^{(i)})]^2 / M_i^*$ ,  $M_z^{(i)} = [\sum (M_j z_j^{(i)})]^2 / M_i^*$

La massa modale efficace del modo  $i$ -esimo in una direzione può essere interpretata come la parte di massa totale che viene movimentata da tale modo in quella direzione. Questa interpretazione è rigorosamente vera solo se il sistema ha gradi di libertà secondo una sola direzione (X o Z) e con masse tutte uguali: in tal caso, infatti, la massa totale è pari alla somma estesa a tutti i modi delle masse modali efficaci.

La massa modale efficace dipende dalla deformata modale, poiché non tutte le masse strutturali vibrano con la stessa efficacia in ciascuna modalità. Soprattutto nel caso di deformate modali superiori, alcune masse possono vibrare di meno o non vibrare affatto. Per ognuna delle due direzioni si definisce **modo fondamentale** (o 'primo modo') il modo che movimentata la maggior parte delle masse in tale direzione.

Generalmente, le prime deformate modali, caratterizzate dai periodi più alti, sono quelle che movimentano la maggior parte delle masse.

Fra tutti i modi calcolati, corrispondenti ai gradi di libertà dinamici del sistema, rivestono interesse i modi che, a partire dal primo, assicurano che la somma delle masse modali efficaci sia pari ad almeno l'85% della massa totale. Ciò assume particolare importanza nelle analisi sismiche dinamiche, dove vengono valutate forze sismiche spettrali competenti ai diversi modi di vibrare, che vengono tra loro combinate come indicato in §7.3.3.1 NTC per tenere conto dello sfasamento fra i modi.

In SAV l'analisi modale non viene utilizzata ai fini di un'analisi sismica dinamica lineare: l'analisi sismica in SAV viene infatti eseguita con il modello rigido-fragile, seguendo la teoria di Heyman.

La motivazione di ciò risiede in quanto affermato nelle CNR-DT 213/2015, riferito in tale contesto ai ponti in muratura ma immediatamente estendibile in generale ai sistemi voltati in muratura:

*"1.4 AZIONE SISMICA (...) Il comportamento certamente non lineare della struttura, deriva principalmente dalla debole resistenza a trazione del materiale, che al limite è nulla, da fenomeni di schiacciamento, e dal possibile dislocamento del pietrame nel corso dello scuotimento sismico. La non-linearità del sistema strutturale rende vane, o comunque di dubbia efficacia, analisi basate sul principio di sovrapposizione, priva di senso le analisi modali e inficia la stessa rappresentazione della azione sismica attraverso gli spettri di risposta elastici (...)"*

Come affermato in precedenza, l'analisi modale in SAV si riferisce allo studio delle vibrazioni proprie del sistema voltato sotto carichi e fessurazioni corrispondenti allo stato limite di esercizio o agli stati limite ultimi.

I risultati illustrano tutti i modi di vibrare significativi, affinché siano disponibili tutte le informazioni su periodi, forme modali e masse modali efficaci, garantendo l'individuazione dei modi più significativi ed in particolare dei modi principali nelle due direzioni di riferimento X e Z.

Per il **numero di modi da calcolare** è possibile scegliere tra le seguenti opzioni:

- tutti i modi corrispondenti ai gradi di libertà dinamici del sistema;
- un numero di modi specificato in input (con limite superiore dato dal n° dei gradi di libertà dinamici).

Si osservi che in dipendenza dalla struttura, può essere necessario il calcolo di un numero elevato di modi, per assicurare l'individuazione del modo principale e per movimentare una percentuale sufficiente di massa.

I carichi applicati sull'arcata, definiti nel modello di SAV sui conci, vengono attribuiti ai nodi nel seguente modo: considerando l'arco modellato nel piano XZ, la forza verticale  $F_z$  viene riportata al baricentro del concio e scomposta in parti uguali ai due nodi iniziale e finale del concio. Di conseguenza, nel nodo  $i$ -esimo (coincidente col nodo finale  $j$  del concio  $i-1$  precedente e col nodo iniziale  $i$  del concio  $i$  successivo) agisce la somma di due contributi di carico relativi ai due conci.

Per quanto riguarda le convenzioni sui segni, in ambiente SAV la forza verticale Z in input nelle CCE è positiva e di tipo gravitazionale se verso il basso.

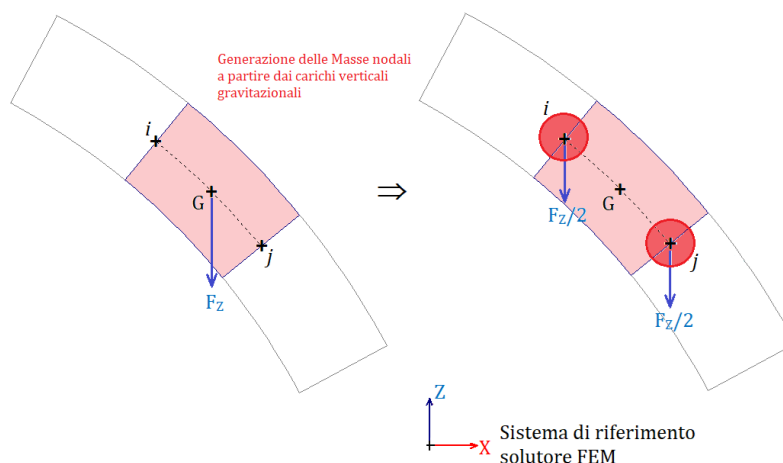


Fig. 7.1.2. Attribuzione dei carichi ai nodi e generazione delle masse nodali

In SAV una Volta può essere composta da uno o più archi affiancati, in cui la Volta viene suddivisa. Per ogni arco, SAV esegue l'analisi modale per le seguenti configurazioni:

in analisi elastica, per tutte le CCC da analizzare per SLE;

in analisi statica SLU: EQU: per tutte le CCC;

in analisi sismica SLU: SLV: per la direzione X nei due versi +X e -X.

I modi di vibrare possono quindi differire fra le diverse configurazioni esaminate, cui in generale

corrispondono masse diverse e diversi stati di fessurazione, ed in particolare nel caso di più archi ideali possono differire tra i vari archi affiancati, in particolare se vi sono carichi presenti solo su una parte della struttura (non su tutti gli archi). La diversità dei modi di vibrare fra archi affiancati costituisce una semplificazione del problema spaziale: tuttavia, le informazioni ottenute possono essere significative per inquadrare in prima approssimazione la modifica della forma modale nella direzione trasversale Y rispetto al piano medio dell'arcata (piano XZ) (considerazioni analoghe possono essere condotte per i risultati delle analisi elastiche di archi affiancati, relativamente alle sollecitazioni e alle deformazioni).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi elastica SLE, in una data CCC si considerano - secondo i dati in input - una o più CCE (riconosciute in base al moltiplicatore non nullo: il moltiplicatore definito in SAV viene utilizzato per le combinazioni SLU, e se non nullo viene posto pari a 1 per la combinazione SLE). I carichi della CCC sono composti dall'assemblaggio dei carichi delle CCE considerate, ognuna delle quali è affetta dal proprio coefficiente di combinazione  $\psi_0$  definito in input, secondo la formulazione della Combinazione caratteristica impiegata per gli SLE ([2.5.2] in §2.5.3 NTC e §3.9 CNR-DT 213).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi statica condotta per SLU (EQU), si considerano le diverse CCC definite. I carichi delle CCC sono composti dall'assemblaggio dei carichi delle CCE considerate, ognuna delle quali è affetta dal proprio moltiplicatore (inteso come coefficiente parziale per le azioni  $\gamma_G, \gamma_Q$ ) e dal proprio coefficiente di combinazione  $\psi_0$  definito in input, secondo la formulazione della Combinazione fondamentale impiegata per gli SLU ([2.5.1] in §2.5.3 NTC).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi sismica condotta per SLU (SLV), si considerano le due combinazioni sismiche +X e -X, ognuna determinata dall'assemblaggio dei carichi delle CCE contrassegnati come agenti sismicamente (carichi gravitazionali) ed affetta dal proprio coefficiente di combinazione  $\psi_2$  definito in input, secondo la formulazione della Combinazione sismica ([2.5.5] in §2.5.3 NTC).

## **Moduli di elasticità**

Alle aste vengono attribuiti i moduli di elasticità longitudinale e tangenziale della muratura definiti nei dati della volta.

Nelle analisi elastiche in generale viene fatto riferimento ai valori medi dei moduli di elasticità, come specificato in §4.1.1.1 NTC per gli elementi in calcestruzzo: in assenza di indicazioni specifiche per la muratura, il riferimento ai valori medi si può ritenere valido anche per gli elementi strutturali in muratura (i valori medi dei moduli elastici sono peraltro normalmente assunti per i livelli di conoscenza LC1 e LC2). In ogni caso, i moduli di elasticità utilizzati vengono definiti in input.

Possono inoltre essere considerate due possibili riduzioni dei valori di riferimento dei moduli elastici, riguardo ai seguenti due aspetti (per i quali si richiamano concetti in parte già presentati per l'analisi elastica).

### **(1) Rigidezze fessurate**

Nelle analisi elastiche lineari in condizioni statiche NTC non prevede riduzioni dei moduli di elasticità a causa delle condizioni fessurate, tranne il caso degli elementi in calcestruzzo per la determinazione degli effetti delle deformazioni termiche, degli eventuali cedimenti e del ritiro, per i quali negli stati limite di esercizio si devono assumere rigidezze intermedie tra quelle delle sezioni interamente reagenti e quelle delle sezioni fessurate, essendo queste ultime assunte pari alla metà di quelle delle sezioni interamente reagenti (§4.1.1.1 NTC): ciò equivale ad una riduzione del 25% dei moduli elastici.

Per tenere conto in SLE delle condizioni fessurate che possono caratterizzare gli archi in muratura, SAV consente opzionalmente tale riduzione; tuttavia, si deve considerare che il procedimento non lineare di SAV può determinare la riduzione delle rigidezze attraverso il calcolo e in linea di principio non è necessario ridurre i moduli elastici per tener conto della fessurazione. La riduzione è comunque consigliabile qualora si decida di eseguire l'analisi modale in modalità elastica, con struttura completamente reagente.

Analogamente, per l'analisi modale riferita all'analisi statica SLU: EQU, viene applicata se richiesta la riduzione del 25%.

Nel caso invece di analisi modale associata all'analisi sismica SLU: SLV, la riduzione è pari al 50% (§7.2.6 NTC). Tuttavia, per le analisi modali riferite alle analisi limite statica e sismica si può osservare che l'analisi in condizione fessurate corrispondenti all'arco reagente determinato dalla soluzione determina implicitamente la riduzione della rigidezza nella definizione delle sezioni delle aste di modello e pertanto può non essere scelta l'opzione di riduzione dei moduli elastici.

## **(2) Fattore di confidenza $F_c$**

Secondo quanto indicato in §C8.5.4 NTC: "I fattori di confidenza sono utilizzati per la riduzione dei valori dei parametri meccanici dei materiali. (...)". In SAV FC può essere applicato, oltre ai parametri di resistenza, anche ai moduli elastici.

## **Note sulla modellazione in presenza di rinforzi**

Come illustrato in precedenza, il modello elastico di SAV è un modello piano costituito da elementi finiti monodimensionali: le aste corrispondono ai conci costituenti l'arcata (volta) e sono collegate tra loro da nodi definiti dai baricentri delle interfacce tra conci.

Quando viene eseguita l'analisi in condizioni fessurate, in presenza di rinforzo con materiale composito le aste rappresentative dei conci possono trovarsi in una delle due situazioni seguenti.

(1) Nel concio l'arco reagente coincide con l'arco originario, non sono presenti fessurazioni e la sezione è interamente reagente (compressa). Il rinforzo non fornisce alcun contributo alla rigidezza dell'asta.

Nella matrice delle rigidezze i termini  $E \cdot A$  e  $E \cdot J_y$ , rappresentativi della rigidezza assiale e di quella flessionale, sono formati dal modulo di elasticità della muratura e da area e momento d'inerzia della sezione completa del concio.

(2) Il concio è interessato da una zona di fessurazione: la sezione reagente a compressione è ridotta rispetto alla sezione geometrica del concio, nei termini di rigidezza  $A$  e  $J_y$  sono corrispondentemente ridotte e si indicano con  $A^*$  e  $J_y^*$ . Le rigidezze complessive della sezione contengono anche il contributo del rinforzo:  $(E \cdot A)$  originaria (dell'asta integra) diviene:  $(E \cdot A^* + E_f \cdot A_f)$ , dove  $E_f$  è il modulo di elasticità del rinforzo e  $A_f$  l'area della sezione trasversale del nastro, data dallo spessore moltiplicato per l'estensione del rinforzo in direzione trasversale;

$(E \cdot J_y)$  originaria diviene:  $(E \cdot J_y^* + E_f \cdot A_f \cdot (h/2)^2)$  dove  $h$  è l'altezza del concio: in questa formulazione si tiene quindi conto del contributo di rigidezza flessionale del rinforzo, essendo il nodo strutturale collocato in posizione baricentrica (a metà altezza del concio).

Nel caso di rinforzo con cappa in calcestruzzo, nella procedura di calcolo si applicano le seguenti variazioni:

- la dimensione della sezione dell'arco ha un incremento pari allo spessore della cappa;
- il modulo di elasticità si assume pari alla media pesata di muratura e calcestruzzo in base agli spessori dei due materiali;
- con una media pesata analoga si definisce il peso specifico effettivo del concio composto da muratura e calcestruzzo.

## 8. ANALISI SISMICA

L'analisi sismica del sistema voltato consiste nell'applicazione di forze orizzontali nei conci crescenti secondo un moltiplicatore dei carichi verticali associati a masse sismiche e nell'esecuzione, ad ogni passo, delle verifiche di sicurezza fino ad individuare il moltiplicatore di collasso, corrispondente al massimo valore del moltiplicatore applicabile alla struttura in esame. Durante il processo incrementale avviene infatti un degrado progressivo della capacità della struttura, consistente, dal punto di vista della stabilità, nella formazione consecutiva di cerniere fino ad un numero massimo che segna l'insorgere del meccanismo, il quale si manifesta in corrispondenza appunto del moltiplicatore di collasso.

A partire dal moltiplicatore di collasso, le relazioni che legano tra loro il moltiplicatore stesso, l'accelerazione strutturale e la massa partecipante consentono il calcolo della massima accelerazione orizzontale al suolo sostenibile, cioè della capacità in termini di PGA. Confrontando tale capacità con la domanda secondo Normativa (la PGA richiesta per SLV, dipendente dal sito di ubicazione dell'edificio e dalle ipotesi sulla probabilità di superamento dello stato limite) si ottiene l'indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$ . La capacità può anche essere espressa in termini di periodo di ritorno  $T_R$ .

Il valore dell'accelerazione al suolo che investe l'edificio nella sua zona di ubicazione compare pertanto solo nell'elaborazione finale e nel confronto tra capacità e domanda, dopo l'analisi incrementale ed il calcolo del moltiplicatore di collasso. In altri termini, la domanda non entra nel processo di calcolo della capacità: questo invece non avviene quando si considera anche la componente sismica verticale, come illustrato nel seguito.

I fondamenti della metodologia di analisi sismica per i sistemi voltati in muratura sono illustrati in [C.1].

In dettaglio, le **fasi di esecuzione dell'analisi sismica** sono le seguenti.

**(1)** Determinazione del moltiplicatore di collasso nella direzione orizzontale X (XZ=piano dell'arco), nei due versi +X e -X, tenendo conto eventualmente della combinazione direzionale (con azione sismica in direzione trasversale +/-Y e componente sismica verticale) per ognuno dei seguenti comportamenti:

- per l'arco: stabilità (sempre valutata), taglio/attrito, compressione e trazione nei rinforzi (se richiesti);
- per i piedritti, sinistro e destro separatamente (se l'analisi e verifica dei piedritti è stata richiesta): stabilità (sempre valutata), taglio/attrito, compressione e trazione nei rinforzi (se richiesti);
- per il timpano (nel caso dei ponti): stabilità (meccanismo di collasso: ribaltamento fuori piano, in direzione Y) (in SAV la verifica del timpano viene sempre eseguita, sotto azione sismica locale trasversale calcolata con la percentuale di componente trasversale Y scelta per le azioni sismiche trasversali nei piedritti).

Distintamente per i diversi elementi: arco, piedritti e timpano, a partire dal moltiplicatore di collasso (pari al minimo fra i vari comportamenti a stabilità, compressione, attrito esaminati per un dato elemento) viene elaborato il confronto fra capacità e domanda che conduce alla definizione dell'indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$ , confrontato con il valore target specificato in input.

**(2)** Analisi del sistema voltato (arco + piedritti se considerati nelle verifiche) sia sotto il moltiplicatore di collasso dell'arco, sia sotto forze orizzontali corrispondenti ad un moltiplicatore orizzontale prefissato dei carichi verticali.

Lo scopo dal valore prefissato del moltiplicatore orizzontale in input è di ottenere la completa descrizione dello stato dell'arco (curva delle pressioni, verifiche a compressione ed eventualmente a trazione dei rinforzi, verifiche a taglio/attrito) sotto l'azione della domanda in termini di accelerazione (PGA secondo Normativa per SLV); diversamente, sarebbero note solo le informazioni di collasso, ossia la configurazione corrispondente alla formazione del meccanismo sismico che, nel caso di verifica sismica soddisfatta, si attiva per accelerazioni superiori alla domanda.

Per definire in input il moltiplicatore orizzontale corrispondente alla domanda, il software propone valori di riferimento sia per struttura sottostante (la struttura a cui l'arco appartiene) rigida sia per struttura deformabile, considerando in questo secondo caso la quota di imposta della volta; i valori di riferimento

sono sempre calcolati assumendo una frazione di massa partecipante  $e^*$  pari a 1. Prima dell'analisi, infatti, non è noto il valore di  $e^*$ , parametro sempre non superiore a 1, poiché  $e^*$  dipende dal cinematismo. In presenza di rinforzi a trazione che impediscono la formazione di cerniere su un lato (estradosso o intradosso), il cinematismo non può attivarsi e si assume  $e^* = 1$ . A favore di sicurezza, è possibile considerare  $e^* = 1$  anche in caso di attivazione del cinematismo. L'assunzione  $e^* = 1$  è comunque a favore di sicurezza, in quanto il moltiplicatore  $\alpha_0$  corrispondente alla domanda cresce linearmente con  $e^*$ .

Come accennato, oltre alla componente sismica longitudinale (nel piano dell'arco), è possibile considerare:

- la **componente sismica verticale**, con effetti al 100% o al 30%, con forze sismiche verticali verso l'alto, oppure verso il basso o dipendenti dal cinematismo;
- la **componente sismica trasversale**. L'analisi sismica con componente trasversale viene eseguita per i piedritti, e richiede quindi l'analisi e la verifica dei piedritti. La **componente trasversale (orientata secondo Y)** viene considerata nell'ambito della combinazione direzionale (§7.3.5 NTC), assegnando a ognuna delle due componenti orizzontali il coefficiente di combinazione definito in input (0%, 30% o 100%). E' inoltre possibile scegliere il **verso in direzione Y** (+Y o -Y, rispettivamente entrante nel piano o uscente dal piano del modello).

La componente sismica trasversale determina nei piedritti sollecitazioni di taglio  $T_Y$  e di momento  $M_X$  ortogonali al piano del sistema voltato. Nei piedritti, i momenti e i tagli trasversali ( $T_Y$  e  $M_X$ ) si compongono con i momenti ed i tagli nel piano del modello ( $T_X$  e  $M_Y$ ).

Le **verifiche di sicurezza nei piedritti** in presenza della componente trasversale sono le seguenti:

- **stabilità**: il punto di sollecitazione deve essere interno alla sezione del piedritto (ciò equivale ad un'area reagente a compressione non nulla);
- **compressione**: in caso di area reagente non nulla, la massima tensione di compressione non deve superare il limite di resistenza;
- **taglio/attrito**: la verifica considera il taglio risultante dalla composizione dei tagli nelle due direzioni, che non deve superare il taglio resistente.

L'analisi di SAV individua quindi nella fase (1) la configurazione di collasso e in corrispondenza di questa effettua il calcolo dell'indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$ .

Per lo studio degli interventi di consolidamento, ad esempio con rinforzi FRP o FRCM, la configurazione di collasso potrebbe riferirsi a un indicatore di rischio sismico molto elevato, superiore al limite strettamente necessario, e condurre così verso una progettazione ridondante.

Come già osservato, attraverso il moltiplicatore orizzontale prefissato in input, l'analisi eseguita propone la soluzione strutturale corrispondente alla domanda, inclusa quindi la disposizione degli eventuali rinforzi, ed è pertanto molto utile **definire un moltiplicatore in input che corrisponda alla domanda desiderata, o in altre parole all'indicatore di rischio sismico obiettivo**.

Si consideri anzitutto l'obiettivo di **adeguamento** con  $\zeta_E = 1.0$ , ossia con capacità della struttura uguale alla domanda.

Per determinare il moltiplicatore da specificare in input corrispondente a  $\zeta_E = 1.0$  si deve distinguere il caso di struttura sottostante rigida da quello di struttura sottostante deformabile (§C8.7.1.2.1 NTC).

Nel caso di struttura sottostante (la struttura a cui l'arco appartiene) rigida, la relazione che fornisce il moltiplicatore corrispondente alla domanda è data da:

$$\alpha_0 = \frac{(a_g/g) \cdot S}{q} \cdot e^* \cdot F_C$$

dove  $a_g$  e  $S$  sono i parametri di spettro specificati in input per SLV,

$e^*$  = frazione di massa partecipante (posto, come già osservato, pari a 1 per il calcolo dei valori di riferimento di  $\alpha_0$ ),

$F_C$  = fattore di confidenza,



$q$  = fattore di comportamento specificato in input, il cui valore può essere assunto pari a 2.  
Se invece la struttura sottostante è deformabile, la relazione per SLV è la seguente:

$$\alpha_0 = S_d(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma \cdot e^* \cdot F_c$$

dove:  $T_1$  = primo periodo della struttura a cui l'arco appartiene,  
 $S_d(T_1)$  è lo spettro di progetto per lo stato limite SLV, definito da  $S_e(T_1)/q$  con la condizione  $\geq 0.2 a_g$  (§3.2.3.5 NTC), essendo  $S_e$  lo spettro elastico in direzione orizzontale,  
 $\psi(Z) = Z/H$ , con  $Z$  baricentro delle linee di vincolo del cinematismo dell'arcata, e  $H$  altezza complessiva della struttura cui l'arco appartiene,  
 $\gamma$  = fattore di partecipazione modale.

Il software indica i valori dei moltiplicatori di riferimento per SLV su struttura rigida e per SLV su struttura deformabile, utilizzando i vari parametri descrittivi della struttura in input ( $a_g$ ,  $S$ ,  $F_o$ ,  $T_c$ ,  $T_1$ ,  $H$ ,  $\gamma$ ,  $F_c$ ).

La struttura deformabile si riferisce al solo arco. Per i piedritti la capacità viene sempre calcolata con l'ipotesi di struttura rigida (linea di vincolo a quota 0).

Se l'obiettivo non è l'**adeguamento** con indicatore di rischio sismico  $\zeta_E = 1.0$  ma **con  $\zeta_E = 0.8$**  oppure il **miglioramento**, ad esempio con  $\zeta_E = 0.6$ , la stima dei moltiplicatori orizzontali in input per definire il progetto corrispondente all'obiettivo si ottiene moltiplicando i valori sopra calcolati (distintamente per la struttura rigida e per quella deformabile) per il valore target di  $\zeta_E$ . L'indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$  è espresso in termini di accelerazione al suolo, ed è dato dal rapporto fra capacità e domanda.

Per i **ponti esistenti in muratura** realizzati prima della classificazione sismica dell'area su cui insistono o nel rispetto di una normativa tecnica antecedente alle NTC (§C8.8.7 NTC):  $\zeta_E = 0.8$  indica l'adeguamento sismico dell'infrastruttura.

Per quanto riguarda la **componente sismica verticale**, le forze corrispondenti possono riferirsi al 100% oppure al 30% degli effetti, con forze disposte verso l'alto, verso il basso oppure dipendenti dal cinematismo.

La scelta sulla riduzione degli effetti del sisma verticale secondo la percentuale del 30% corrisponde alle indicazioni date in §7.3.5 NTC, secondo cui per un sistema piano quale l'arco analizzato in SAV (posto per ipotesi nel piano XZ; si prescinde per semplicità dalla componente trasversale), la risposta sismica è calcolata unitariamente per le due componenti X e Z applicando l'espressione:

$$1.00 \cdot E_x + 0.30 \cdot E_z$$

dove gli effetti più gravosi si ricavano dal confronto tra le due combinazioni ottenute permutando circolarmente i coefficienti moltiplicativi 1.00 e 0.30.

Si considera tuttavia la possibilità che, a favore di sicurezza, la componente sismica verticale non venga ridotta, tenendo conto del fatto che le strutture voltate sono particolarmente sensibili alle variazioni delle forze verticali e conseguentemente dello sforzo normale nei conci.

Per l'inclusione nell'analisi sismica della componente verticale è indispensabile definire la modalità con cui introdurre forze inerziali verticali all'interno della procedura incrementale con moltiplicatore orizzontale crescente: queste modalità sono descritte nei paragrafi §8.1 e §8.2.

## 8.1. MOLTIPLICATORI ORIZZONTALE E VERTICALE

Per quanto riguarda le forze inerziali verticali, anzitutto è necessario osservare che non sarebbe corretto considerare a priori forze verticali che si incrementano con lo stesso moltiplicatore delle forze orizzontali, in quanto le accelerazioni strutturali orizzontale e verticale sono tra loro indipendenti.

Infatti, anche se secondo NTC:  $a_{gV} = a_{gH}$ , gli spettri di risposta orizzontale e verticale sono distinti (§3.2.3.2.1, §3.2.3.2.2 NTC).

A partire quindi dal valore comune dell'accelerazione al suolo orizzontale e verticale, il moltiplicatore

verticale sarà legato al moltiplicatore orizzontale secondo lo stesso rapporto che lega tra loro accelerazione strutturale verticale e accelerazione strutturale orizzontale.

Si faccia riferimento ad un concio di un arco (fig. 8.1.1) sottoposto ad un carico  $P$  agente nel suo baricentro. Considerando carichi statici e azioni sismiche orizzontali e verticali, le forze agenti durante un passo incrementale di analisi sismica caratterizzato dal moltiplicatore  $\alpha$  in direzione orizzontale sono le seguenti: forza peso  $P$ , forza inerziale orizzontale  $\alpha P$  (in fig.: direzione e verso:  $+X$ ) e forza inerziale verticale  $\alpha_v P$ .

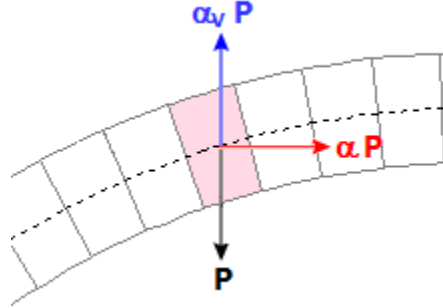


Fig. 8.1.1.

$\alpha_v$  è legato ad  $\alpha$ : infatti il rapporto tra le forze inerziali verticale e orizzontale, entrambe corrispondenti al peso  $P$ , è pari al rapporto fra le accelerazioni spettrali  $S_{eZ}$  e  $S_{eX}$ .

Nel caso di un arco posto con vincolo alle imposte posto a quota  $Z=0$ , lo spettro elastico viene calcolato per il periodo  $T=0$ , e quindi si ha:

$$\alpha_v / \alpha = [\kappa \cdot S_{eZ}(0) / S_{eX}(0)] \quad (8.1.1)$$

dove  $\kappa$  è il fattore di combinazione del sisma verticale  $Z$  con il sisma orizzontale  $X$ , che, secondo quanto osservato in precedenza, può essere assunto pari a 0.30 oppure 1.00 qualora si ritenga opportuno considerare effetti sismici verticali presenti in modo completo e simultaneo con gli orizzontali.

Dalle formulazioni normative degli spettri di risposta, si ricava:

$$\alpha_v / \alpha = (\kappa \cdot a_g \cdot S_v) / (a_g \cdot S) \quad (8.1.2)$$

dove:  $S_v$  e  $S$  sono i fattori di suolo che tengono conto della categoria di sottosuolo ( $S_s$ ) e delle condizioni topografiche ( $S_T$ ) rispettivamente per lo spettro verticale e per lo spettro orizzontale. Si osservi che per il verticale, diversamente dall'orizzontale, si assume sempre un coefficiente di sottosuolo unitario. La (8.1.2) si semplifica quindi in:

$$\alpha_v / \alpha = \kappa / S_s \quad (8.1.3)$$

Se invece l'arco murario ha imposte vincolate alla quota  $Z$  e la costruzione intera cui l'arco appartiene è caratterizzata dal periodo fondamentale in direzione orizzontale  $T_{1X}$ , ipotizzando per la costruzione stessa un periodo proprio verticale basso (i modi verticali presentano sempre alte frequenze) tale da poter considerare un comportamento rigido in direzione  $Z$ , il rapporto fra le accelerazioni spettrali diviene:

$$\alpha_v / \alpha = (\kappa \cdot a_g \cdot S_v) / (S_{eX}(T_{1X}) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma) \quad (8.1.4)$$

dove  $\psi(Z)$  è il corrispondente modo di vibrazione secondo  $X$  normalizzato ad uno in sommità della costruzione ( $\psi(Z) = Z/H$ ), con  $H$  altezza della costruzione stessa) e  $\gamma$  è il corrispondente coefficiente di partecipazione modale.

All'inizio del processo incrementale di SAV, per un dato moltiplicatore  $\alpha$ ,  $\alpha_v$  deriva dalla (8.1.3) o dalla (8.1.4), a seconda della posizione in quota dell'arco.

(i) Nel caso della (8.1.3) il rapporto tra i due moltiplicatori è costante qualunque sia il valore di  $\alpha$ : pertanto, nel corso del processo incrementale, variando  $\alpha$  - e quindi le forze inerziali orizzontali - si può corrispondentemente calcolare  $\alpha_v$  per determinare le forze inerziali verticali; al termine del processo incrementale si ottiene il valore di collasso di  $\alpha$ , da cui si ricava infine la capacità in termini di PGA ( $a_g \cdot S$ ).

(ii) Nel caso della (8.1.4) si segue inizialmente la stessa procedura illustrata al punto precedente (i). In questo caso, però, alla capacità ottenuta  $a_g \cdot S$  può corrispondere un diverso valore del rapporto  $\alpha_v / \alpha$ , che - secondo la (8.1.4) - dipende dal valore di  $a_g$ . In pratica, quindi, è avvenuto che nel corso del calcolo della capacità (la procedura incrementale) si è utilizzato un rapporto costante tra moltiplicatore verticale e orizzontale dipendente dalla domanda, nota però solo al termine della procedura.

E' quindi necessario ripetere l'analisi incrementale, correggendo il rapporto tra moltiplicatori in base al valore della capacità appena calcolato al termine della prima procedura.

Si giunge così ad un nuovo valore di  $a_g \cdot S$  e quindi del rapporto  $\alpha_v / \alpha$ , e così via: la riesecuzione delle procedure incrementali termina quando il rapporto  $\alpha_v / \alpha$  si è stabilizzato e a questo punto è stata determinata la soluzione corretta.

## 8.2. CAMPO DI FORZE INERZIALI VERTICALI

Mentre l'analisi incrementale viene considerata secondo un verso prefissato, +X o -X, le contemporanee forze verticali potranno avere nei diversi concetti verso generico: verso l'alto (alleggerimento del carico verticale, causato dalla forza d'inerzia dovuta all'accelerazione verso il basso) oppure verso il basso (aggravamento del carico verticale, causato dalla forza d'inerzia dovuta all'accelerazione verso l'alto). In linea di principio non ha giustificazione fisica ritenere che tutto il campo di forze verticali sia equiverso. L'incertezza sull'orientamento delle forze verticali rende necessario adottare diverse ipotesi di lavoro alla ricerca della situazione più sfavorevole. E' possibile proporre alcune analisi significative: un campo di forze equiverse verso l'alto, oppure equiverse verso il basso o dipendenti dal cinematismo.

L'ipotesi di verso delle forze verticali legato al cinematismo appare particolarmente significativa.

Infatti, il meccanismo attivato dal moltiplicatore di collasso mostrerà un preciso campo di spostamento dei concetti, con rotazioni cinematiche intorno alle cerniere formatesi nel corso dei degradi progressivi.

Alcuni gruppi di concetti tenderanno a muoversi verso il basso, altri verso l'alto. Il campo di forze d'inerzia verticali a favore di sicurezza seguirà tale spostamento: gli effetti della componente sismica verticale saranno infatti massimi quando le corrispondenti forze tenderanno ad abbassare ancora più i concetti che si abbassano (forze di aggravamento, verso il basso) e ad innalzare ancor più quelli che si innalzano (forze di alleggerimento, verso l'alto).

La forma esatta del meccanismo di collasso (cinematismo) è nota tuttavia solo ad analisi avvenuta, ma trattandosi di una struttura ad arco, con comportamento qualitativamente definibile a priori, è possibile evitare processi iterativi innescati sulla forma del cinematismo ipotizzando specifiche modalità secondo cui il cinematismo si manifesta nel verso di applicazione delle forze orizzontali.

Come mostrato dalla fig. 8.2.1, nel caso di sisma nel verso +X, ottenuto applicando solo azioni inerziali orizzontali, il meccanismo di collasso presenta un abbassamento nella parte sinistra e un innalzamento nella parte destra; nel caso -X avviene il viceversa.

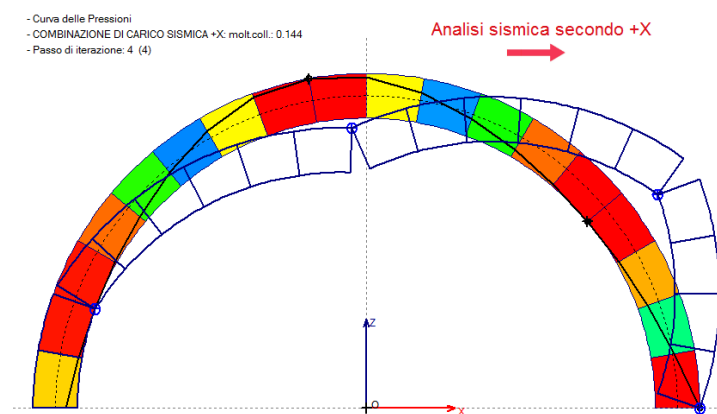


Fig. 8.2.1

Tracciando quindi nella mezzeria della luce l'asse verticale dell'arco, si possono distinguere il gruppo di conci in abbassamento ulteriore sotto forze verticali verso il basso dall'altro gruppo con comportamento opposto. Questa modalità di applicazione delle forze sismiche verticali garantisce risultati a favore di sicurezza. Il campo di forze inerziali verticali che a favore di sicurezza può essere applicato sull'arco al fine di eseguire un'analisi sismica che tenga conto di entrambe le componenti orizzontale e verticale è rappresentato in fig. 8.2.2 ed è identificabile nelle ipotesi di SAV come campo di forze verticali dipendenti dal cinematismo.

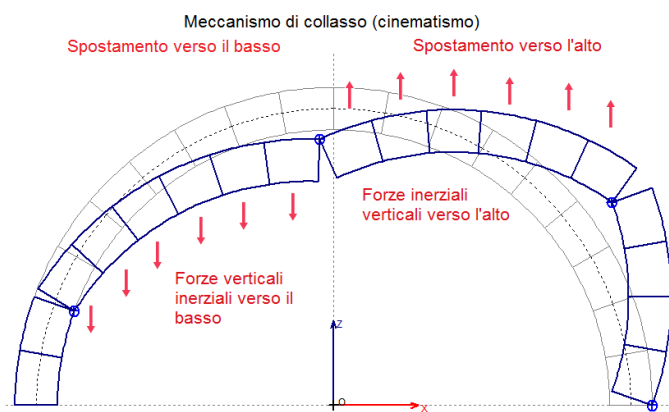


Fig. 8.2.2

### 8.3. ANALISI SISMICA IN DIREZIONE TRASVERSALE E COMBINAZIONE DIREZIONALE

Come illustrato in precedenza, l'analisi sismica di SAV può essere eseguita, oltre che in direzione longitudinale (+/-X, essendo XZ il piano medio del sistema voltato), anche in direzione trasversale Y (ortogonale al piano XZ).

E' opportuno riassumere le modalità secondo le quali vengono gestite le azioni sulle sommità dei piedritti, e di conseguenza le sollecitazioni di taglio e momento agenti nei piedritti stessi.

Il taglio nella direzione X del piano dell'arco è un taglio che nei confronti del piedritto può considerarsi fuori piano; il taglio si considera negativo in corrispondenza della spinta dall'arco verso l'esterno.

Il taglio dovuto al sisma 'trasversale' cioè nella direzione Y ortogonale al piano dell'arco si può invece considerare come un taglio complanare al piano del piedritto (taglio positivo o negativo, a seconda del verso sismico +/- Y).

Nelle diverse sezioni del piedritto a quota crescente (dall'alto verso il basso, secondo -Z) il momento viene incrementato per effetto del braccio delle forze orizzontali.

I diversi contributi nelle direzioni X e Y sono riassunti qui di seguito e rappresentati in fig. 8.3.1.

## Analisi Statica

### Taglio

**TX** (lungo X):

- 1) spinta all'impasta prodotta dall'arco (TX.1)
- 2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto: è nulla, c'è solo in sismica (TX.2)

**TY** (lungo Y):

- 1) spinta all'impasta prodotta dall'arco: è nulla, c'è solo in sismica (TY.1)
- 2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto: è nulla, c'è solo in sismica (TY.2)

### Momento

**MY** (lungo X) (rotazione intorno a Y):

- 1) TX.1 per il braccio (MY.1)
- 2) TX.2 per il braccio, che all'impasta è l'altezza del baricentro delle masse che insistono sul piedritto rispetto alla sommità del piedritto stesso: nullo perchè TX.2 è nulla, c'è solo in sismica (MY.2)
- 3) (eventuale) prodotto dal carico verticale all'impasta dell'arco a causa del disassamento dell'asse dell'arco all'impasta rispetto al piano medio del piedritto (MY.3)
- 4) (eventuale) prodotto dalle masse che insistono sul piedritto a causa del disassamento della loro risultante rispetto al piano medio del piedritto (MY.4)

**MX** (lungo Y) (rotazione intorno all'asse X):

- 1) spinta all'impasta prodotta dall'arco: nullo perchè TY.1 è nulla (MX.1)
- 2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto: nullo perchè TY.2 è nulla, c'è solo in sismica (MX.2)
- 3) (eventuale) nel caso di volta composta da più archi ideali, prodotto da archi che applicano carichi verticali alle imposte tra loro differenti (per geometrie diverse, ossia: diverse profondità degli archi, o per carichi applicati su di essi in modo differente) che generano una risultante verticale disassata rispetto all'asse del piedritto (MX.3)
- 4) il momento MX prodotto dalle masse che insistono sul piedritto a causa del disassamento della loro risultante rispetto al piano medio del piedritto è nullo perchè nella direzione Y le masse sono sempre in asse (MX.4=0)

## Analisi Sismica

### Taglio

**TX** (lungo X):

- 1) spinta all'impasta prodotta dall'arco (TX.1)
- 2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto: forza d'inerzia (TX.2)

**TY** (lungo Y) (TPiedTrasv):

- 1) spinta generata trasversalmente dalle forze sismiche nei conci: forza d'inerzia (TY.1)
- 2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto: forza d'inerzia (TY.2)

### Momento

**MY** (lungo X) (rotazione intorno a Y):

- 1) TX.1 per il braccio (MY.1)
- 2) TX.2 per il braccio, che all'impasta è l'altezza del baricentro delle masse che insistono sul piedritto rispetto alla sommità del piedritto stesso (MY.2)
- 3) (eventuale) prodotto dal carico verticale all'impasta dell'arco a causa del disassamento dell'asse dell'arco all'impasta rispetto al piano medio del piedritto (MY.3)

4) (eventuale) prodotto dalle masse che insistono sul piedritto a causa del disassamento della loro risultante rispetto al piano medio del piedritto (MY.4)

**MX** (lungo Y) (rotazione intorno all'asse X):

1) spinta all'imposta prodotta dall'arco TY.1 per il proprio braccio (MX.1)

2) spinta dalle masse che insistono direttamente sul piedritto TY.2 per il proprio braccio (MX.2)

3) (eventuale) nel caso di volta composta da più archi ideali, prodotto da archi che applicano carichi verticali alle imposte tra loro differenti (per geometrie diverse, ossia: diverse profondità degli archi, o per carichi applicati su di essi in modo differente) che generano una risultante verticale disassata rispetto all'asse del piedritto (MX.3)

4) il momento MX prodotto dalle masse che insistono sul piedritto a causa del disassamento della loro risultante rispetto al piano medio del piedritto è nullo perchè nella direzione Y le masse sono sempre in asse (MX.4=0)

Nell'immagine seguente (fig. 8.3.1) i momenti vengono riferiti al braccio che li genera, rispetto alla sezione di sommità del piedritto. Ovviamente, per le sezioni del piedritto sottostanti, procedendo dalla sommità verso la base, nel caso di sezione costante del piedritto lungo l'elevazione, il braccio delle forze verticali resta costante mentre quello delle forze orizzontali si incrementa.

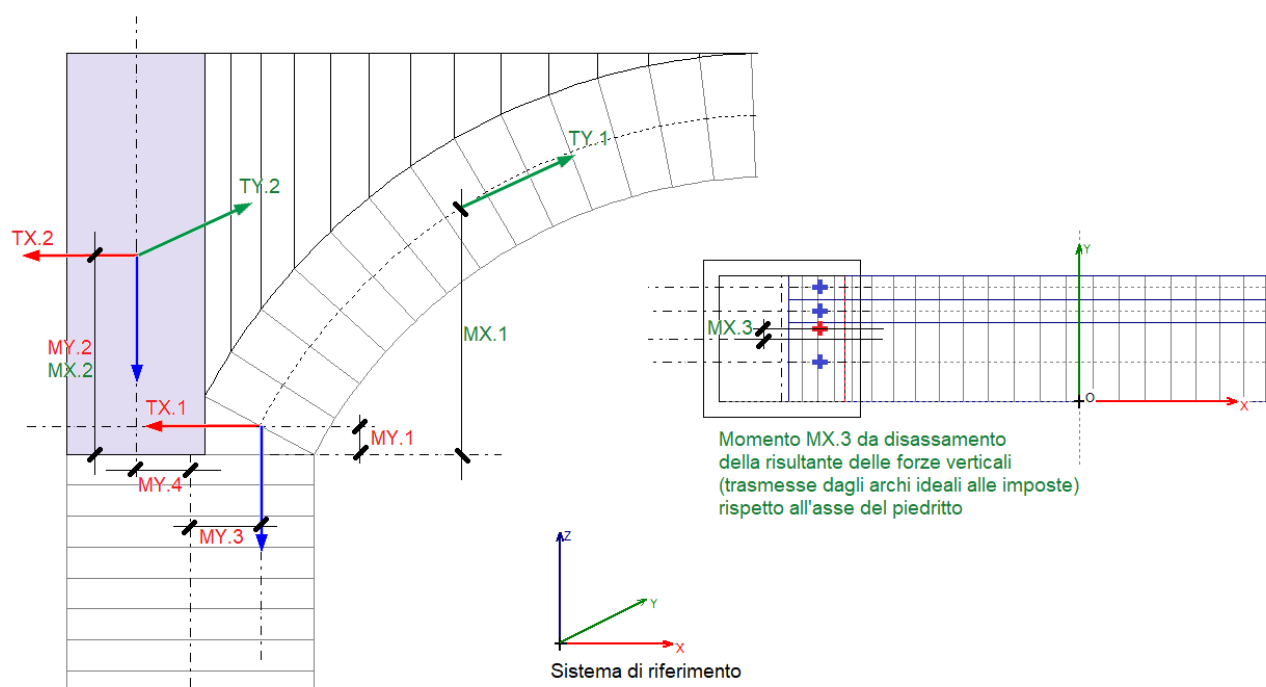


Fig. 8.3.1. Azioni longitudinali e trasversali sui piedritti

L'immagine mostra che le azioni trasversali possono essere prodotte anche dal disassamento della risultante delle forze verticali, trasmesse dall'arcata, rispetto all'asse del piedritto. In tal senso, quindi, le azioni trasversali possono essere presenti anche in analisi statica, non solo in analisi sismica (momento MX.3). Per quanto riguarda la conformità della modellazione di SAV alla Normativa per i Ponti in muratura, tale norma specifica in §8.3.2 CNR-DT 213 che nella modellazione piana il comportamento trasversale può essere normalmente considerato; inoltre, le azioni trasversali che derivano dalle posizioni eccentriche dei carichi (rispetto al piano medio dello sviluppo longitudinale del ponte) possono essere descritte attraverso la suddivisione in 'strisce' (corrispondenti alle corsie del traffico) del piano del ponte, come specificato in §8.11 CNR-DT 213.

### **8.11 ECCENTRICITÀ DELLA CONDIZIONE DI CARICO RISPETTO ALL'ASSE LONGITUDINALE DELLE ARCADE**

*Di norma, il ponte va verificato disponendo sulle arcate il carico ad esse trasmesso dalla via portata attraverso i percorsi di diffusione del carico illustrati nel cap. 3.IS. Tale carico sarà in generale caratterizzato da una variabilità longitudinale e trasversale, e ove possibile il modello di calcolo sarà adeguato a tale circostanza, fornendo direttamente i risultati corrispondenti alla condizione di carico considerata.*

*Sono a tal fine idonei modelli di calcolo che tengano conto della variabilità del carico e della geometria tridimensionale dell' opera.*

*In alternativa, per tenere conto della eventuale eccentricità trasversale del carico sulla via portata, **è consentito suddividere il ponte in strisce di larghezza pari alle diverse corsie di percorrenza\*** o comunque modellare in via approssimativa la interazione tra le diverse strisce, purché nel rispetto delle condizioni di equilibrio.*

***E' consentito verificare ciascuna striscia indipendentemente le une dalle altre.*** Ove sia possibile riconoscere la striscia più sollecitata, è lecito verificare solo la striscia più sollecitata. E' altresì consentita la verifica per strisce di carico ***anche nel caso in cui si operi attraverso la organizzazione gerarchica dei componenti\*\*.***

\* In SAV, le 'strisce' corrispondono agli archi ideali nei quali la volta può essere suddivisa.

\*\* La modellazione per componenti è prevista dalla Normativa (§9 CNR-DT 213) ed è la modalità di modellazione implementata nel software SAV per i sistemi Multicampata, in particolare per i Ponti.

## **NORMATIVA DI RIFERIMENTO**

### **Generale**

**D.M. 17.1.2018:** "Aggiornamento delle Norme tecniche per le costruzioni ", Supplemento ordinario alla "Gazzetta Ufficiale", n.42 del 20 febbraio 2018

**Circolare 21.1.2019, n. 7 C.S.LL.PP.:** Istruzioni per l'applicazione dell'«Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"» di cui al decreto ministeriale 17 gennaio 2018

**EC2:** Eurocodice 2 - Progettazione delle strutture in calcestruzzo. UNI EN 1992-1-1:2005 Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici

### **Edifici monumentali**

**Direttiva del Presidente del Consiglio dei Ministri del 9.2.2011:** "Valutazione e riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale con riferimento alle Norme tecniche per le costruzioni di cui al decreto del Ministero delle infrastrutture e dei trasporti del 14 gennaio 2008", di cui costituisce parte integrante la **Circ. 26 del 2.12.2010 del Ministero per i Beni e le Attività Culturali:** "Linee guida per la valutazione e riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale"

### **Ponti**

**CNR-DT 213/2015:** "Istruzioni per la Valutazione della Sicurezza Strutturale di Ponti Stradali in Muratura"

**Linee guida per la classificazione e gestione del rischio, la valutazione della sicurezza ed il monitoraggio dei ponti esistenti,** allegate al parere del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici n. 54/2022, espresso dall'Assemblea Generale in data 10.06.2022

**Agenzia Nazionale per la Sicurezza delle Ferrovie e delle Infrastrutture Stradali e Autostradali (ANSFISA):** Istruzioni operative per l'applicazione delle Linee Guida per la classificazione e gestione del rischio, la valutazione della sicurezza ed il monitoraggio dei ponti esistenti, previste dall'articolo 1, comma 3, del Decreto del Ministro delle Infrastrutture e della Mobilità sostenibili 1 luglio 2022, pubblicato nella GURI del 23.08.2022, Revisione1, Parere di Assemblea Generale del C.S.LL.PP. n. 17 del 24.07.2025

### **Normativa RFI, Rete Ferroviaria Italiana**

RFI DTC INC PO SP IFS 001A. Specifica per la progettazione e l'esecuzione dei ponti ferroviari e di altre opere minori ferroviarie sotto binario

RFI DTC INC CS SP IFS 001 A, Specifica per la progettazione geotecnica delle opere civili ferroviarie

RFI DIN ICI LG IFS 001 A, Linea Guida per la verifica strutturale dei ponti ad arco in muratura

### **Interventi di consolidamento mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati**

**CNR-DT 200 R1/2013:** "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati. Materiali, strutture di c.a. e di c.a.p., strutture murarie"

**LG 2009:** "Linee guida per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture in c.a., c.a.p. e murarie mediante FRP", Documento approvato il 24.07.2009 dall'assemblea Generale Consiglio Superiore LL PP

**CNR-DT 215/2018:** "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati a Matrice Inorganica"

### **Sismica**

**Ordinanza del Capo del Dipartimento di Protezione Civile 780 del 20.5.2021:** Prevenzione Rischio Sismico, con Allegato: " Scheda di sintesi della verifica sismica di ponti strategici ai fini della Protezione Civile o rilevanti in caso di collasso a seguito di evento sismico"



## BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

### **A. Teoria generale sull'analisi limite**

- [A.1] M. Paradiso, G. Tempesta, S. Galassi, F. Pugi: **Sistemi Voltati in Muratura**, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma, 2007
- [A.2] S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta: **Sul calcolo degli archi in muratura**, pubblicazione n. 1/89 del Dipartimento di Costruzioni dell'Università degli Studi di Firenze, Facoltà di Architettura, reperibile al link:  
<http://www.cias-italia.it/PDF/129.pdf>
- [A.3] S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta: **Analisi statica e cinematica ed equilibrio limite di strutture ad arco a vincoli unilateri**, Atti del IX Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata (AIMETA)
- [A.4] S. Briccoli Bati, M. Paradiso, G. Tempesta: **Archi in muratura soggetti a carichi e cedimenti delle imposte**, Costruire in Laterizio, pp.436-443, n.60/97.

### **B. Testi di riferimento**

- [B.1] J. Heyman: **The masonry arch**, Ellis Horwood, Chichester, 1982. Traduzione italiana: **Lo scheletro di pietra**, EPC Editore, Roma, 2014
- [B.2] A. Borri, L. Bussi (a cura di): **Archi e volte in zona sismica. Meccanica delle strutture voltate**, DoppiaVoce, Napoli, 2011
- [B.3] E. Tomasoni: **Analisi, verifiche e consolidamento strutturale di archi e volte**. Manuale per la valutazione della sicurezza e per la progettazione degli interventi, Flaccovio, Palermo, 2021
- [B.4] S. Di Pasquale, C. Messina, L. Paolini, B. Furiozzi: **Corso di Costruzioni: Vol. 3, Tecniche dei Sistemi Strutturali**, Le Monnier, Firenze, 1995.
- [B.5] V. Franciosi: **Verifica sismica delle grosse opere in muratura**, Atti del Convegno di Ingegneria antisismica e protezione civile, Comune di Ragusa, 7-20 ottobre 1981.
- [B.6] P. Faccio, P. Foraboschi: **Volte a botte ed archi. Analisi agli stati limite ultimi di volte in muratura con rinforzi in FRP**, L'Edilizia, De Lettera Editore, maggio / giugno 2000; N° 5/6; anno XIV; pp. 48-56.
- [B.7] P. Lenza, A. Ghersi: **Edifici in muratura alla luce della nuova Normativa sismica**, Flaccovio, Palermo, 2011.

### **C. Analisi sismica**

- [C.1] F. Pugi, S. Galassi: **Seismic analysis of masonry voussoir arches according to the Italian building code**, Int. J. Earthquake Eng. 2013;30(3):33-55

### **D. Cedimenti:**

- [D.1] S. Galassi, G. Misseri, L. Rovero, G. Tempesta: **Failure modes prediction of masonry voussoir arches in moving supports**, Engineering Structures 173 (2018), 706-717

### **E. Analisi modale**

- [E.1] A. Avorio, A. Borri, M. Corradi, A. Barbieri, A. Di Tommaso: **Comportamento dinamico di volte in muratura rinforzate con FRP-materials: primi risultati**, X Congresso Nazionale "L'Ingegneria Sismica in Italia", 2001
- [E.2] M. Corradi, A. Borri, G. Castori, K. Coventry: **Experimental Analysis of Dynamic Effects of FRP Reinforced Masonry Vaults**, Materials 2015, 8, 8059-8071; doi:10.3390/ma8125445

### **F. Arco armato**

- [F.1] L. Jurina: **Cerchiatura di strutture murarie: tecniche tradizionali ed innovative**, Ingenio 2013, reperibile al link:  
<https://www.cias-italia.it/uploads/JURINA - Ingenio 16-2013 cerchiature di elementi murari.pdf>

[F.2] L. Jurina: **Evoluzione e declinazioni nell'uso dell'Arco Armato**", reperibile al link:  
[https://jurinaradaelli.it/wp-content/uploads/2013/11/2013\\_Evoluzione-e-declinazioni-nelluso-dellArco-Armato-11.pdf](https://jurinaradaelli.it/wp-content/uploads/2013/11/2013_Evoluzione-e-declinazioni-nelluso-dellArco-Armato-11.pdf)

[F.3] L. Jurina, M. Giglio, S. Bonfigliuoli: **Sviluppi nella sperimentazione della tecnica dell'arco armato**", reperibile al link:

<https://jurinaradaelli.it/wp-content/uploads/2013/11/2015-Sviluppi-sperimentazione-tecnica-arco-armato.pdf>

### ***G. Spinte passive dal riempimento:***

[G.1] P. Gelfi: **Role of Horizontal Backfill Passive Pressure on the Stability of Masonry Vaults**, Restoration of Buildings and Monuments 8 (2002): 573 - 590: [http://gelfi.unibs.it/pdfPubblicazioni/14-Role of horizontal backfill.pdf](http://gelfi.unibs.it/pdfPubblicazioni/14-Role%20of%20horizontal%20backfill.pdf)

### ***H. Ponti esistenti in muratura:***

[H.1] C. Torre: **Ponti in Muratura, Dizionario Storico Tecnologico**, Alinea, Firenze, 2003

[H.2] M. Mazzoleni, L. Jurina: **Ponti in muratura: difetti e patologie**, Convegno CIAS: Ponti e viadotti: ispezioni visive e tecniche di risanamento, Bolzano, 18-19 ottobre 2006, reperibile al link:  
<http://www.cias-italia.it/PDF/93.pdf>

[H.3] F. da Porto: **Vulnerabilità sismica dei ponti ferroviari in muratura**, Convegno CIFI, RFI - Università degli Studi di Padova, 2013, reperibile al link:  
[http://www.cifi.it/UplDocumenti/padova/05 Vulnerabilita sismica dei ponti ferroviari\\_da Porto.pdf](http://www.cifi.it/UplDocumenti/padova/05_Vulnerabilita_sismica_dei_ponti_ferrovieri_da_Porto.pdf)

[H.4] M. Corradi: **Empirical methods for the construction of masonry arch bridges in the 19th century. Arch Bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair**. Proceedings of the second international arch bridge conference, Edr A. Sinopoli, Venice 6–9 October 1998, Balkema Rotterdam, pp 25–36

[H.5] D. Proske, Pieter van Gelder: **Safety of Historical Stone Arch Bridges**, Springer, 2009

[H.6] J. M. Delbecq: **Les ponts en maçonnerie**, Ministère des Transports, SETRA, Paris, 1982.