

# 2019



**ASDEA SOFTWARE START UP  
INNOVATIVA S.R.L.**

Via Breviglieri, 8  
65128, PESCARA, ITALY  
Tel/fax +39.085.431.0059  
P.IVA 02196590687  
[www.asdeasoft.net](http://www.asdeasoft.net)

**OGGETTO:** **Documento teorico di riferimento per l'implementazione delle cerniere plastiche in AEDES**

**DATA:** 10 Marzo 2020

**REDATTO DA:** Ing. Francesca Candeloro  
PhD. Massimo Petracca  
Prof. Ing. Guido Camata

**COMMITTENTE:** **AEDES SOFTWARE S.N.C.**  
Via Ferrante Aporti, 32 -56028 San Miniato Basso  
(PI-CF e P.IVA: 01735120972 - Codice REA: PI-142866)

## 1 RIFERIMENTI NORMATIVI E BIBLIOGRAFICI

Il presente documento descrive la formulazione delle cerniere plastiche implementate in AEDES per la definizione del comportamento non lineare di elementi strutturali in c.a. I riferimenti bibliografici e normativi a cui si richiama nel proseguo del documento sono:

- [1] NTC 2018, Aggiornamento delle «Norme tecniche per le costruzioni» del 17 Gennaio del 2018
- [2] Circolare del 21 gennaio 2019 n.7 "Istruzioni per l'applicazione dell'«Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni"» di cui al decreto ministeriale 17 gennaio 2018"
- [3] CNR DT 200/2013, "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati Materiali, strutture di c.a. e di c.a.p., strutture murarie"
- [4] CNR DT 212/2013, "Istruzioni per la Valutazione Affidabilistica della Sicurezza Sismica di Edifici Esistenti"
- [5] Spacone, E., Ciampi, V., & Filippou, F. C. (1992). A beam element for seismic damage analysis.
- [6] Taucer, F., Spacone, E., & Filippou, F. C. (1991). A Fiber Beam-Column Element For Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures.
- [7] Biskinis, D.E. (2007). Resistance and deformation capacity of concrete members with or without retrofitting". Thesis submitted to the Civil Engineering Department of the University of Patras, in partial fulfilment of the requirements for the Doctoral Degree, University of Patras, Greece (in Greek).
- [8] Biskinis, D.E. and Fardis, M.N. (2004). Cyclic strength and deformation capacity of RC members, including members retrofitted for earthquake resistance, Proceedings 5th International Ph.D Symposium in Civil Engineering, Delft, 1125-1133. Balkema.
- [9] Biskinis, D. & Fardis, M.N. (2010). Flexure-controlled ultimate deformations of members with continuous or lap-spliced bars. Structural Concrete, 11(2), 93-108.
- [10] Biskinis, D. & Fardis, M.N. (2010). Deformations at flexural yielding of members with continuous or lap-spliced bars. Structural Concrete, 11(3), 127-138.

## 2 SIMBOLI, ABBREVIAZIONI E NOTAZIONI

Si riporta di seguito l'elenco dei simboli, abbreviazioni e notazioni utilizzate nel presente documento.

$M_y$	Momento di snervamento della sezione in c.a. valutato dalla bilinearizzazione del legame momento curvatura, ottenuto dal calcolo della sezione a fibre
$\kappa_y$	Curvatura di snervamento della sezione in c.a. valutato dalla bilinearizzazione del legame momento curvatura, ottenuto dal calcolo della sezione a fibre
$\kappa_u$	Curvatura ultima della sezione in c.a. valutato dalla bilinearizzazione del legame momento curvatura, ottenuto dal calcolo della sezione a fibre
$\phi_y$	Notazione utilizzata nelle NTC 2018 per indicare la curvatura di snervamento della sezione in c.a.
$\phi_u$	Notazione utilizzata nelle NTC 2018 per indicare la curvatura ultima della sezione in c.a.
$\theta_y$	Rotazione alla corda di snervamento di una sezione in c.a.
$\theta_u$	Rotazione alla corda ultima di una sezione in c.a.
$T_y$	Resistenza a taglio valutata considerando una rotazione pari a $\theta_y$ (§ C87.2.3.5 di [2])
$T_{2y}$	Resistenza a taglio valutata considerando una rotazione pari a $\theta_{2y}$ (§ C87.2.3.5 di [2])
$T_{3y}$	Resistenza a taglio valutata considerando una rotazione pari a $\theta_{3y}$ (§ C87.2.3.5 di [2])
$T_u$	Resistenza a taglio valutata considerando una rotazione pari a $\theta_u$ (§ C87.2.3.5 di [2])
$\overline{M}_y^T$	Momento equilibrato corrispondente al taglio resistente valutato per un valore di rotazione pari a $\theta_y$ . E' ottenuto dal prodotto tra la luce di taglio dell'elemento strutturale e $T_y$
$\overline{M}_{2y}^T$	Momento equilibrato corrispondente al taglio resistente valutato per un valore di rotazione pari a $\theta_{2y}$ . E' ottenuto dal prodotto tra la luce di taglio dell'elemento strutturale e $T_{2y}$
$\overline{M}_{3y}^T$	Momento equilibrato corrispondente al taglio resistente valutato per un valore di rotazione pari a $\theta_{3y}$ . E' ottenuto dal prodotto tra la luce di taglio dell'elemento strutturale e $T_{3y}$
$\overline{M}_u^T$	Momento equilibrato corrispondente al taglio resistente valutato per un valore di rotazione pari a $\theta_u$ . E' ottenuto dal prodotto tra la luce di taglio dell'elemento

	strutturale e $T_u$
$M_{y,mista}$	Momento di snervamento della cerniera mista pressoflessione deviata-taglio
$\theta_{y,mista}$	Rotazione alla corda di snervamento della cerniera mista pressoflessione deviata-taglio
$\theta_{u,mista}$	Rotazione alla corda ultima della cerniera mista pressoflessione deviata-taglio
$L_v$	Luce di taglio
$L_{pl}$	Lunghezza della cerniera plastica
$h$	Altezza della sezione in c.a.
<b>SLC</b>	Stato Limite di Collasso
<b>SLV</b>	Stato Limite di Salvaguardia della vita
<b>SLD</b>	Stato Limite di Danno

### 3 INTRODUZIONE

Le analisi nonlineari statiche (pushover) necessitano di modelli semplici, ma allo stesso tempo accurati, che consentano di seguire il comportamento di telai soggetti a forze laterali crescenti. La semplicità dei modelli è necessaria per assicurare tempi di calcolo ragionevoli mentre l'accuratezza è richiesta per poter ottenere una risposta che, avvicinandosi il più possibile all'effettivo comportamento della struttura, possa descrivere i meccanismi di danneggiamento e rottura più comuni, quali le rotture a flessione, pressoflessione e taglio di travi e pilastri in c.a..

In questo documento viene descritto l'approccio utilizzato per la formulazione e l'implementazione di cerniere plastiche concentrate in elementi in c.a. trave e colonna, per il software di calcolo AEDES. La cerniera plastica considerata nel prosieguo del presente documento è una **cerniera mista pressoflessione deviata-taglio**. Essa si distingue dalle più comuni cerniere disaccoppiate di flessione e taglio, in quanto **permette di predire attraverso il solo controllo del legame Momento-Rotazione quale sia la tipologia di rottura dell'elemento strutturale (se a flessione, a taglio-flessione o a taglio)**. La cerniera mista è ottenuta sovrapponendo al comportamento elasto-plastico delle cerniere a presso-flessione deviata (momento-rotazione), il legame della cerniera a taglio degradante. È nota la riduzione della resistenza tagliante degli elementi strutturali in c.a. per effetto della risposta inelastica a flessione in prossimità del collasso. L'interazione tra flessione e taglio nel determinare la modalità di crisi dell'elemento può essere schematicamente illustrata utilizzando la Figura 1 tratta dal documento [4].

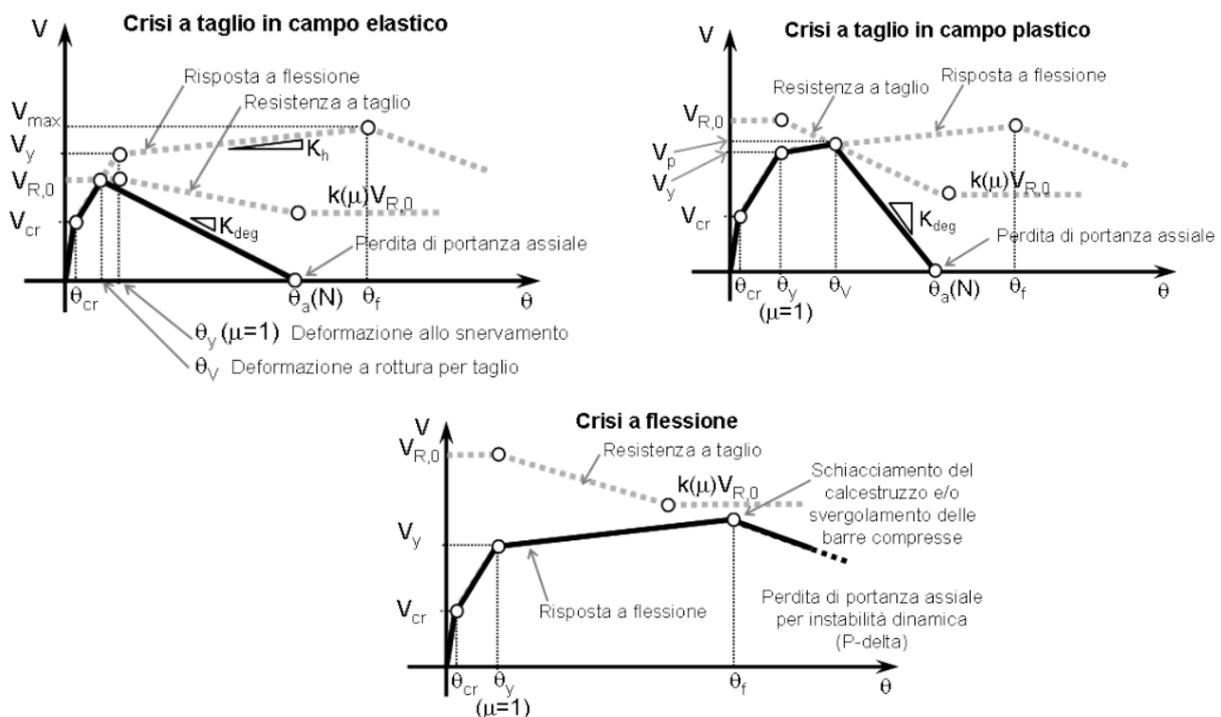


Figura 1: Modalità di collasso di un elemento in cemento armato soggetto a flessione, taglio e sforzo normale.

-  $V_{R,0}$  è la resistenza a taglio iniziale;

- $V_y$  è il taglio plastico corrispondente alla domanda di taglio in equilibrio con la resistenza flessionale;
- $\theta_a$  è la deformazione angolare corrispondente alla perdita della portanza assiale dell'elemento.

La cerniera mista implementata in AEDES è tuttavia formulata in termini di Momento – Rotazione, attraverso la conversione della resistenza tagliante (T) in momento:

$$\overline{M^T} = TL_v$$

dove  $L_v$  è la luce di taglio dell'elemento strutturale.

La definizione dei legami a pressoflessione e a taglio utilizzati nella cerniera mista fa riferimento alle [1] NTC 2018, Aggiornamento delle «Norme tecniche per le costruzioni» del 17 Gennaio del 2018 e alla relativa Circolare [2] ed è illustrata in dettaglio nei paragrafi successivi.

## 4 TEORIA, RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI E NORMATIVI DELLE CERNIERE MISTE PRESSOFLESSIONE-TAGLIO

Le cerniere miste pressoflessione deviata-taglio sono in grado di rappresentare il comportamento misto taglio-pressoflessione dell'elemento strutturale mediante il solo controllo del legame  $M-\theta$ . Come anticipato nell'introduzione, la cerniera mista si ottiene sovrapponendo al comportamento elasto-plastico delle cerniere a flessione/pressoflessione (momento- $\theta$ ), il legame della cerniera a taglio degradante. Per la definizione dei legami a flessione/pressoflessione e a taglio utilizzati nella cerniera mista si fa riferimento alle [1] e alla relativa Circolare [2].

### 4.1 DEFINIZIONE DELLA CURVA DI COMPORTAMENTO DELLE CERNIERE A PRESSOFLESSIONE DEVIATA DI ELEMENTI STRUTTURALI IN C.A.

Il comportamento di una cerniera a flessione, definita secondo i criteri stabiliti dal documento [2], è rappresentata da una curva carico/deformazione come quella mostrata nella Figura 2, ove in ordinata è rappresentata la forza generica ed in ascissa la corrispondente deformazione. Nel caso della Figura 2, la deformazione è rappresentata dalla rotazione  $\theta$  rispetto alla corda del punto ove è collocata la cerniera plastica, mentre la forza è rappresentata dal momento flettente.

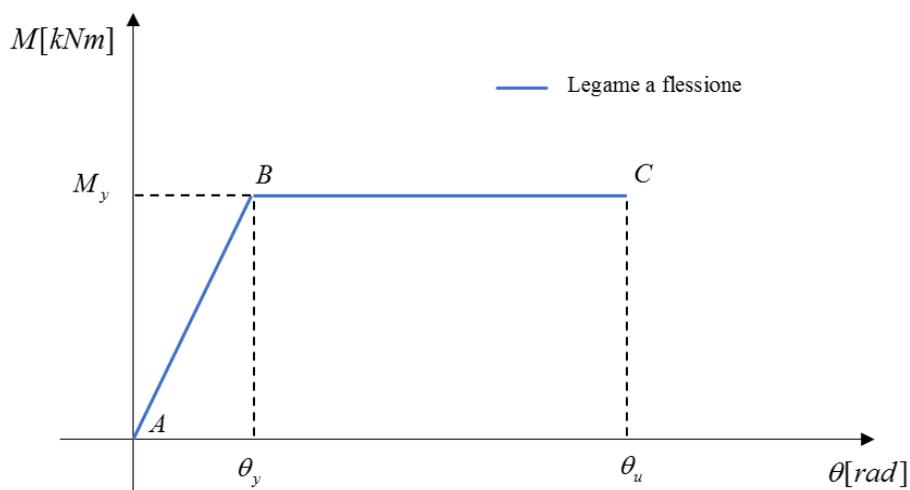


Figura 2 : Comportamento della cerniera plastica secondo la Circolare NTC 2018

Per definire completamente il legame è necessario calcolare ascissa ed ordinata dei punti A, B e C che definiscono i vari tratti rettilinei aventi il seguente significato:

**Tratto A-B:** Fase di comportamento elastico lineare della sezione fino al raggiungimento del momento di snervamento  $M_y$ . In tale fase non si è ancora formata la cerniera plastica a flessione e la sezione è quindi elastica lineare;

**Tratto B-C:** Fase perfettamente plastica fino al raggiungimento della rotazione ultima.

Il valore  $M_y$  si ottiene calcolando il momento di snervamento dell'elemento strutturale considerando lo sforzo assiale agente e la direzione dei momenti sollecitanti. Le ipotesi alla base del calcolo sono:

- conservazione delle sezioni piane;
- legami costitutivi dei materiali in accordo con le [1];
- resistenza dei materiali esistenti definite in accordo con le [1] e la relativa Circolare[2].

Il calcolo del momento di snervamento implementato in AEDES utilizza un modello a fibre, per i dettagli si rimanda al § 5.4.1 del presente documento.

La rotazione rispetto alla corda allo snervamento è definita in accordo alla formulazione proposta da [2] al punto C8.7.2.3.4.

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_v}{3} + 0.0013 \left( 1 + 1.15 \frac{h}{L_v} \right) + 0.13 \phi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad [Eq. 1]$$

Dove:

- $\phi_y$  è la curvatura di snervamento della sezione è calcolata sulla base dell'effettivo sforzo normale agente (la cerniera si aggiorna ad ogni step della push-over);
- $L_v$  è la luce di taglio calcolata come  $M/V$ , sollecitazioni compressive ottenute al passo corrente dell'analisi statica non lineare;
- $h$  è l'altezza della sezione;
- $d_b$  è il diametro delle barre longitudinali della sezione;
- $f_c$  e  $f_y$  sono rispettivamente le resistenze medie di calcestruzzo e acciaio longitudinale, divise per il fattore di confidenza, FC.

$\theta_y$  è pertanto influenzato dalla geometria della sezione e dell'elemento strutturale e dal quantitativo di armatura longitudinale.

La rotazione ultima rispetto alla corda è definita secondo le formulazioni proposte da [2] al punto C8.7.2.3.2.

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0.016 (0.3)^\nu \left[ \frac{\max(0.01; \omega')}{\max(0.01; \omega)} f_c \right]^{0.225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0.35} 25^{\left( \alpha_{ps} \frac{f_{yw}}{f_c} \right)} \left( 1.25^{100 \rho_d} \right) \quad [Eq. 2]$$

Dove:

- $\gamma_{el}$  è pari a 1.5 per gli elementi primari e 1.0 per gli elementi secondari (come definiti al paragrafo 7.2.3 di [1]);
- $\nu$  è lo sforzo assiale normalizzato di compressione agente sulla sezione;
- $\omega$  e  $\omega'$  sono rispettivamente le percentuali meccaniche di armatura longitudinale in trazione e in compressione;

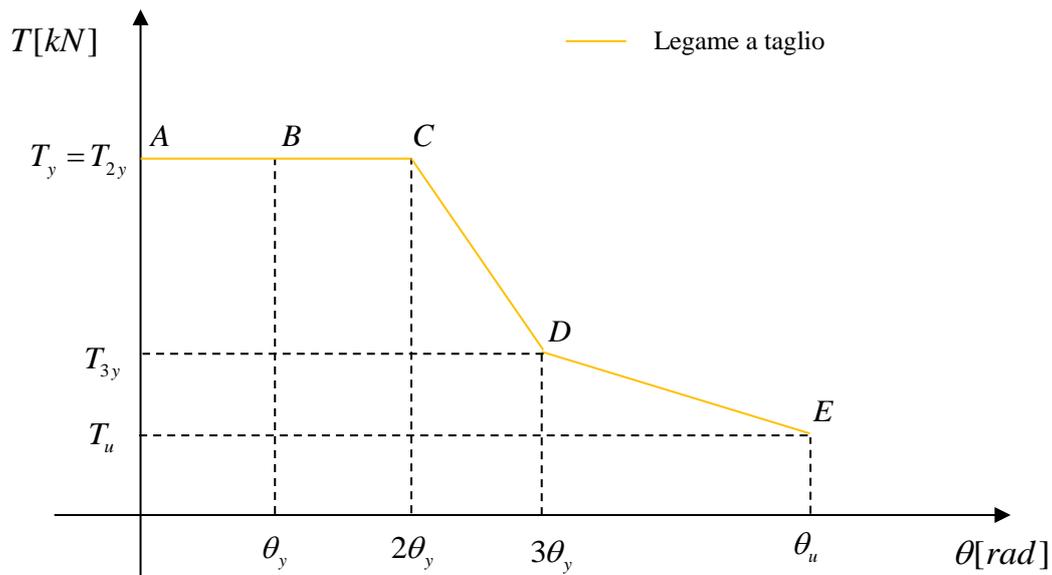
- $f_{yw}$  è la resistenza media dell'acciaio delle staffe, divisa per il fattore di confidenza, FC;
- $\rho_{sx}$  è la percentuale di armatura trasversale;
- $\rho_d$  è la percentuale di armature diagonali in ciascuna direzione;
- $\alpha$  è un fattore di efficienza del confinamento dato da:

$$\rho_{sx} = \left(1 - \frac{s_h}{2b_0}\right) \left(1 - \frac{s_h}{2h_0}\right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2}{6b_0h_0}\right) \quad [Eq. 3]$$

- $b_0$  e  $h_0$  sono le dimensioni del nucleo confinato;
- $b_i$  è la distanza delle barre longitudinali trattenute da tiranti o staffe presenti sul perimetro.

## 4.2 DEFINIZIONE DELLA CURVA DI COMPORTAMENTO DELLA CERNIERA A TAGLIO DEGRADANTE DI ELEMENTI STRUTTURALI IN C.A.

La [2] al punto C8.7.2.3.5 definisce la resistenza a taglio degli elementi travi e pilastri in c.a. attraverso il seguente grafico riportato in *Figura 3*.



*Figura 3:* Legame a taglio per elementi strutturali esistenti in c.a. [2]

**Tratto A-B:** Fase di comportamento elastico lineare della sezione fino al raggiungimento della rotazione alla corda di snervamento  $\theta_y$  definita come descritto nel paragrafo precedente. In tale fase la resistenza a taglio  $T_y$  è definita come il massimo tra i seguenti contributi: resistenza elementi non armati a taglio (formulazione secondo [1] § 4.1.2.3.5.1), resistenza elementi armati a taglio con calcolo della theta variabile (formulazione secondo [1] § 4.1.2.3.5.2), resistenza a taglio in condizioni cicliche (formulazione secondo [2] § C8.7.2.3.5, ripresa dalle trattazioni di Biskinis [7], [8],[9][10]);

**Tratto B-C:** Fase di comportamento plastico della sezione fino al raggiungimento di due volte il valore della rotazione alla corda di snervamento  $\theta_y$ . In tale fase la resistenza a taglio  $T_{2y}$  è definita come il massimo tra i

seguenti contributi: resistenza elementi armati a taglio con calcolo della theta variabile (formulazione secondo [1] § 4.1.2.3.5.2), resistenza a taglio in condizioni cicliche (formulazione secondo [2] § C8.7.2.3.5, ripresa dalle trattazioni di Biskinis [7], [8],[9][10]);

**Tratto C-D:** Fase di comportamento plastico dove il valore della rotazione alla corda è compresa tra  $2.0 \cdot \theta_y$  e  $3.0 \cdot \theta_y$ . In tale fase la resistenza a taglio è definita interpolando linearmente i valori del taglio resistente corrispondenti a  $2 \cdot \theta_y$  ( $T_{2y}$ ) e  $3 \cdot \theta_y$  ( $T_{3y}$ ).

**Tratto D-E:** Fase di comportamento plastico dove il valore della rotazione alla corda è compresa tra  $3.0 \cdot \theta_y$  e  $\theta_u$ . In tale fase la resistenza a taglio è definita come la resistenza a taglio in condizioni cicliche (formulazione secondo [2] § C8.7.2.3.5, ripresa dalle trattazioni di Biskinis [7], [8],[9][10]).

Per modificare la cerniera a taglio e definirla in termini di momento e rotazione alla corda è necessario moltiplicare la sollecitazione tagliante resistente per la luce di taglio dell'elemento. La Figura 4 rappresenta il legame degradante a taglio riportato in termini di momento e rotazione.

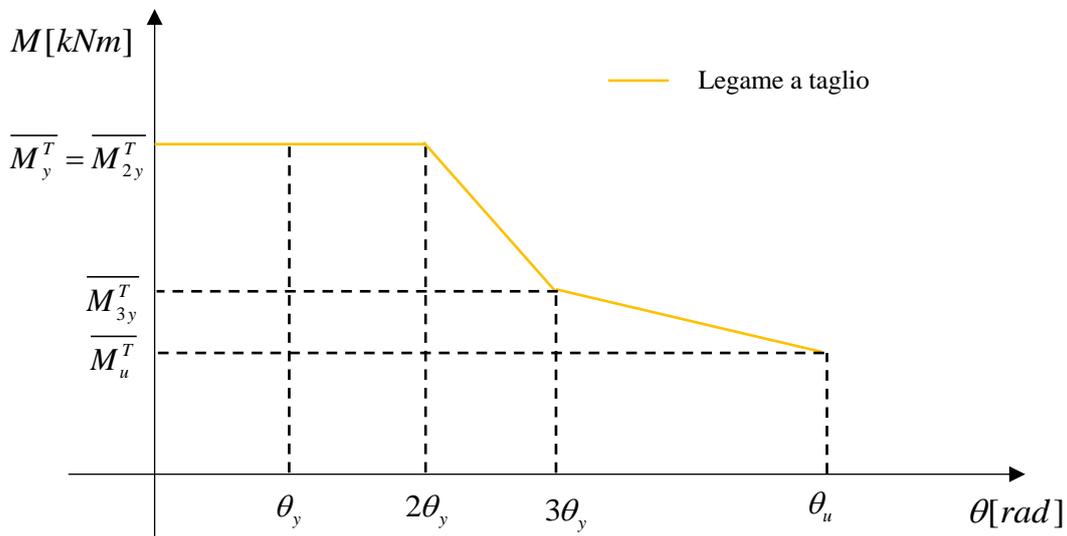


Figura 4: Legame a taglio per elementi strutturali esistenti in c.a.

Nella Figura 4 i seguenti simboli indicano:

- $\overline{M}_y^T$  è il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente  $T_y$  relativo ad una rotazione alla corda pari a  $\theta_y$
- $\overline{M}_{2y}^T$  è il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente  $T_{2y}$  relativo ad una rotazione alla corda pari a  $2 \cdot \theta_y$
- $\overline{M}_{3y}^T$  è il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente  $T_{3y}$  relativo ad una rotazione alla corda pari a  $3 \cdot \theta_y$
- $\overline{M}_u^T$  è il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente  $T_u$  relativo ad una rotazione alla corda pari a  $\theta_u$

### 4.3 VERIFICHE PER DIVERSI STATI LIMITE- RIFERIMENTI NORMATIVI

Per valutare il livello di protezione sismica delle strutture esistenti miste in c.a., le NTC 2018 richiedono il rispetto delle seguenti verifiche relative ai diversi stati limite:

- Verifiche di rigidità (RIG)

Per strutture con classe d'uso I e II: Verifica SLD del massimo drift ([1] §8.3 e §7.3.6.1, [2] § C8.7.2.1.2)

Per strutture con classe d'uso III e IV: Verifica SLO del massimo drift ([1] §8.3 e §7.3.6.1, [2] § C8.7.2.1.2)

- Verifiche di resistenza (RES)

Per le strutture con qualsiasi classe d'uso: Verifica SLV o SLC della resistenza delle membrature ([1] §8.3 e §7.3.6.1)

Per le strutture con classe d'uso IV: Verifica SLD della resistenza delle membrature ([1] §8.3 e §7.3.6)

- Verifiche di duttilità (DUT)

Per le strutture con qualsiasi classe d'uso: Verifica SLV dei meccanismi duttili ([1] §8.3 e §7.3.6.1, [2] § C8.7.2.3.3).

Attraverso l'implementazione delle cerniere miste, è possibile effettuare ad ogni step dell'analisi non lineare le verifiche di resistenza e di duttilità.

## 5 CERNIERE PLASTICHE IMPLEMENTATE NEL SOFTWARE AEDES

### 5.1 PREMESSA

Al fine di poter procedere all'assegnazione ed all'utilizzo delle cerniere plastiche secondo le modalità previste, è necessario disporre del modello strutturale completamente definito, comprensivo di geometria, dettagli strutturali, materiali, carichi e combinazioni di carico.

Le cerniere plastiche sono posizionate agli estremi dell'elemento strutturale considerato.

### 5.2 CERNIERE IMPLEMENTATE E LIVELLI DI DANNO CONSIDERATI

Le tipologie di cerniere implementate nel software sono due:

- Cerniera mista flessione(retta)-taglio (elementi travi);
- Cerniera mista pressoflessione(biassiale)-taglio (elementi pilastri).

A seconda della geometria e del quantitativo di armatura longitudinale e trasversale dell'elemento strutturale la cerniera mista si configura in tre modi:

- **Caso 1:** Comportamento **elasto-plastico (rottura a flessione)** descritta nella Figura 5);
- **Caso 2:** Comportamento **elasto-plastico (rottura a flessione-taglio)** descritta nella Figura 6);
- **Caso 3:** Comportamento **elasto-fragile (rottura a taglio)** descritta nella Figura 7).

**Caso 1:** quando l'elemento è ancora in fase lineare la cerniera è considerata inattiva, quando le sollecitazioni arrivano al limite di plasticizzazione  $\overline{M}_{y,mista}$  e  $\theta_{y,mista}$ , la cerniera si attiva fino al raggiungimento della rotazione alla corda ultima della cerniera mista  $\theta_{u,mista}$ , che coincide con la rotazione ultima del legame flessionale .

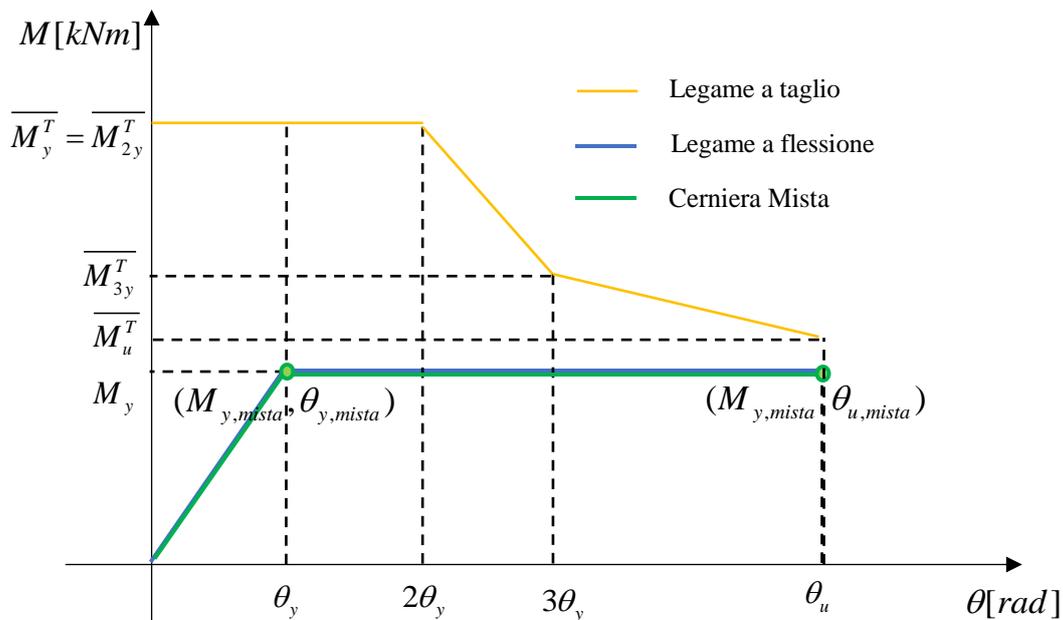


Figura 5: Legame Momento-Rotazione alla corda (Rottura a flessione)

**Caso 2:** quando l'elemento è ancora in fase lineare la cerniera è considerata inattiva, quando le sollecitazioni arrivano al limite di plasticizzazione, la cerniera si attiva fino al raggiungimento della rotazione alla corda ultima della cerniera mista.  $\theta_{u,mista}$ . Quest'ultima è minore della rotazione ultima a flessione poiché è ottenuta come il valore in corrispondenza del quale si ha l'uguaglianza tra il momento di snervamento  $M_y$  e il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente.

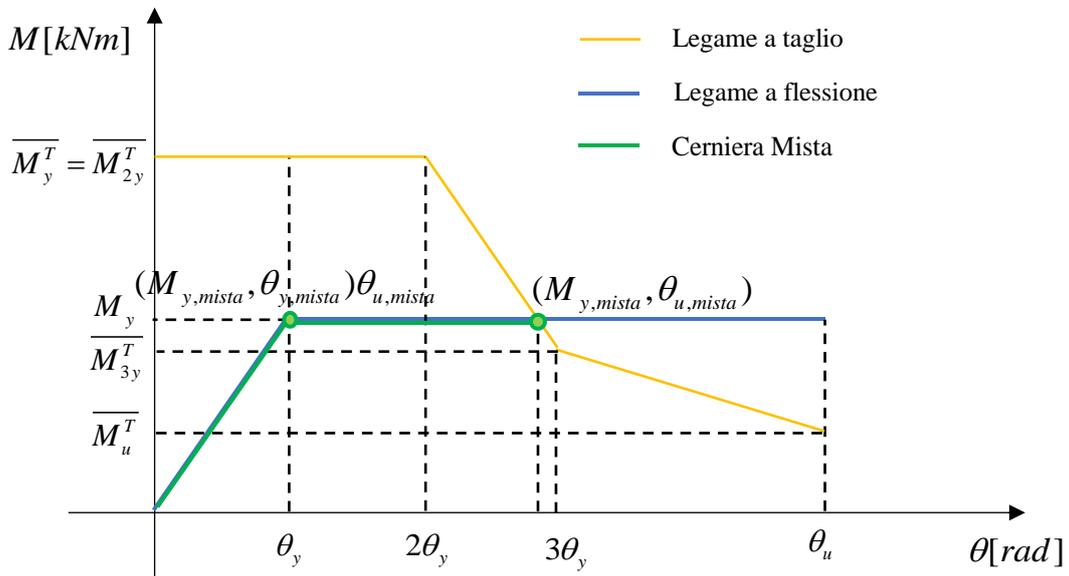


Figura 6: Legame Momento-Rotazione alla corda (Rottura a flessione-taglio)

**Caso 3:** la cerniera è elasto-fragile. Il raggiungimento della sollecitazione  $M_{y,mista}$ , in cui termina la zona con comportamento lineare elastico della sezione, determina la condizione di rottura per l'elemento strutturale.  $M_{y,mista}$  si ottiene come quel valore in corrispondenza del quale si ha l'uguaglianza tra il momento del legame flessionale e il momento equilibrato corrispondente al taglio resistente.

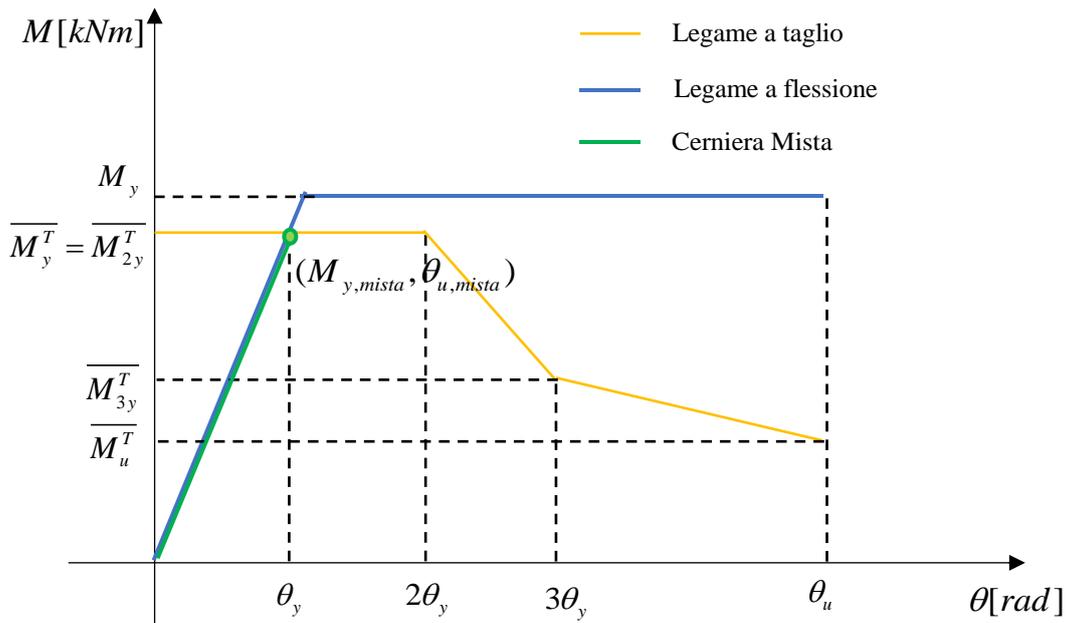


Figura 7: Legame Momento-Rotazione alla corda (Rottura a taglio)

Per valutare il livello di protezione sismica e di performance strutturale richiesto alla struttura, le [1] definiscono i valori di rotazione plastica relativi ai seguenti livelli di sicurezza della costruzione:

- Stato Limite di Salvaguardia della Vita (SLV):

$$\theta_{u,SLV} = \frac{3}{4}\theta_u = \frac{3}{4}\theta_{u,mista} \text{ (nel caso di rottura a flessione)} \quad [\text{Eq. 4}]$$

$$\theta_{u,SLV} = \theta_{u,SLC} = \theta_{u,mista} \text{ (nel caso di rottura a taglio)} \quad [\text{Eq. 5}]$$

$$\theta_{u,SLV} = \min\left(\frac{3}{4}\theta_u, \theta_{u,mista}\right) \text{ (nel caso di rottura a flessione-taglio)} \quad [\text{Eq. 6}]$$

- Stato Limite di Collasso (SLC):

$$\theta_{u,SLC} = \theta_{u,mista} \quad [\text{Eq. 7}]$$

### 5.3 DEFINIZIONE ED ASSEGNAZIONE DELLE CERNIERE PLASTICHE

L'assegnazione delle cerniere in AEDES è gestita in modo automatico. Per ogni elemento trave e pilastro AEDES assegna due cerniere miste pressoflessione(deviata)-taglio applicate alle due estremità. Nel caso degli elementi trave, AEDES effettua una semplificazione della cerniera mista, analizzando il caso di flessione retta.

### 5.4 CERNIERA A FLESSIONE RETTA E A PRESSOFLESSIONE DEVIATA

#### 5.4.1 MOMENTO DI SNERVAMENTO E CALCOLO DELLA CURVATURA A SNERVAMENTO E ULTIMA

Il calcolo del momento di snervamento di una sezione in c.a. soggetta a pressoflessione deviata viene condotto mediante l'elaborazione di un modello a fibre.

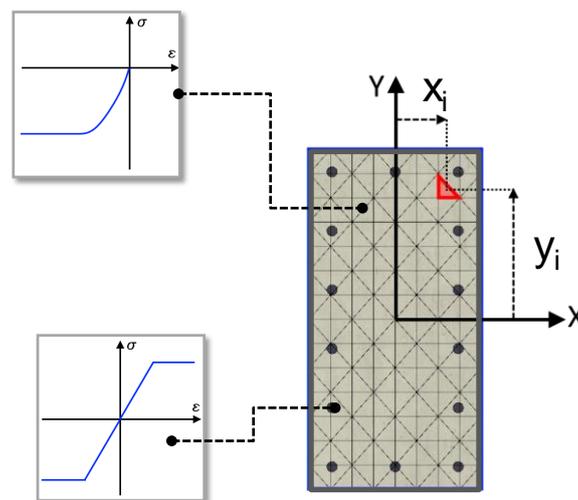


Figura 8: Sezione a fibre

Ciascun materiale che costituisce la sezione viene modellato attraverso i seguenti legami costitutivi:

- per il calcestruzzo si utilizza un legame parabola rettangolo (secondo [1]);
- per l'acciaio si utilizza un legame elasto-plastico (secondo [2]).

Il compito della sezione a fibre è quello di tradurre le singole risposte dei legami costitutivi uniassiali componenti l'intero dominio della sezione, in una risposta costitutiva adatta per l'elemento di trave, cioè una legge costitutiva che relaziona le deformazioni generalizzate  $\overline{\varepsilon}_g$  alle tensioni generalizzate  $\overline{\sigma}_g$  :

$$\overline{\sigma}_g = f(\overline{\varepsilon}_g) \quad [\text{Eq. 8}]$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = f \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} \right) \quad [\text{Eq. 9}]$$

Date le deformazioni generalizzate della trave, e le coordinate della fibra i-esima, la deformazione uniassiale della fibra i-esima può essere calcolata come:

$$\varepsilon_i = H_{\varepsilon} \overline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & z_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} \quad [\text{Eq. 10}]$$

dove  $z_i$  e  $y_i$  sono le coordinate del baricentro della fibra i-esima.

La deformazione uniassiale così ottenuta viene usata come input per la legge costitutiva associata alla fibra i-esima, in modo da ottenere la tensione e il modulo costitutivo tangente:

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i) \quad [\text{Eq. 11}]$$

$$E_{Ti} = \frac{\delta \sigma_i}{\delta \varepsilon_i} \quad [\text{Eq. 12}]$$

Quindi il contributo offerto dalla fibra i-esima alle tensioni generalizzate dell'intera sezione può essere ottenuto come:

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix} = H_{\sigma} \sigma_i = \begin{bmatrix} A_i \\ A_i z_i \\ A_i y_i \end{bmatrix} \sigma_i \quad [\text{Eq. 13}]$$

dove  $A_i$  è l'area della fibra i-esima.

Il contributo offerto dalla fibra i-esima al tensore costitutivo tangente dell'intera sezione può essere calcolato come prodotto del modulo costitutivo tangente della fibra i-esima (scalare) con il prodotto tensoriale (tensore del 2° ordine di dimensioni 3x3) dei due vettori  $H_{\sigma}$  e  $H_{\varepsilon}$ , come segue:

$$D_{Ti} = \frac{\delta \overline{\sigma}_i}{\delta \overline{\varepsilon}} = E_{Ti} (H_{\sigma} \otimes H_{\varepsilon}) \quad [\text{Eq. 14}]$$

Infine, la risposta costitutiva dell'intera sezione viene semplicemente calcolata aggiungendo i contributi di tutte le singole fibre:

$$\overline{\sigma}_g = \sum_{i=1}^{n_{fib}} \overline{\sigma}_i \quad [\text{Eq. 15}]$$

$$D_T = \sum_{i=1}^{n_{fib}} D_{T_i} \quad [\text{Eq. 16}]$$

Per definire il momento di snervamento della sezione viene condotta un'analisi incrementale in controllo di forze. Ad ogni step d'analisi si considera come unico grado di libertà libero lo spostamento verticale, si impongono invece i valori di curvatura e lo sforzo normale agente. Ad ogni step di analisi si incrementano i valori di curvatura fino al raggiungimento della condizione di collasso per la sezione. Il risultato dell'analisi è la definizione per entrambe le direzioni del legame momento curvatura. Da questo grafico è infine possibile ottenere il legame bilineare utilizzando il criterio dell'equivalenza energetica. Dalla bilinearizzazione si ricavano pertanto i seguenti parametri:  $M_y$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_u$ .

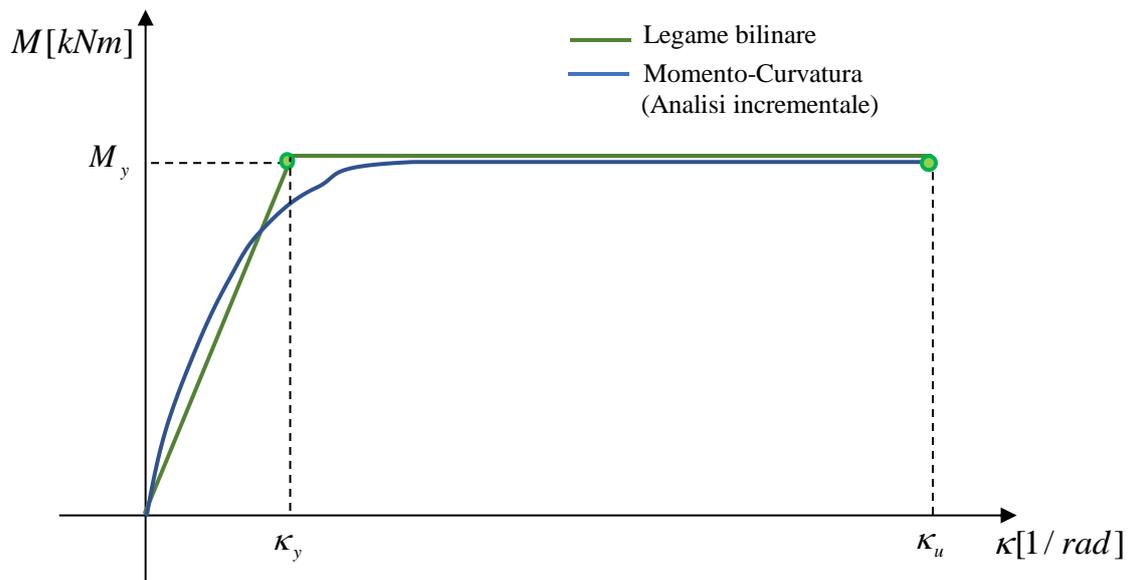


Figura 9: Momento-Curvatura e Bilinearizzazione

Il calcolo dei parametri  $M_y$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_u$  viene condotto per ogni cerniera prima dell'inizio dell'analisi push-over, facendo variare lo sforzo assiale e l'angolo di sollecitazione. Questa procedura permette la precomputazione del dominio  $N-M_x-M_y$  per ogni cerniera.

#### 5.4.2 ROTAZIONE ALLA CORDA DI SNERVAMENTO E ULTIMA

La rotazione alla corda di snervamento è calcolata attraverso la formula C8.7.2.7a della Circolare [2], come spiegato nel paragrafo 4.1.

La rotazione alla corda ultima per gli elementi in c.a. può essere ottenuta attraverso le formule C8.7.2.1 e C8.7.2.5 della Circolare [2], come spiegato nel paragrafo 4.1.. Il valore di  $\theta_u$  è aggiornato ad ogni step dell'analisi push al variare di  $\nu$  e quindi dello sforzo assiale.

### 5.5 CERNIERA A TAGLIO SU TRAVI IN C.A.

Come detto in precedenza, la cerniera a taglio è calcolata seguendo la definizione riportata nel paragrafo 4.2 del presente documento.

Il calcolo delle  $\theta_y$  e  $\theta_u$  segue le modalità definite nel paragrafo 5.4.2, mentre i valori di resistenza a taglio sono ottenuti dalla formulazione della resistenza del meccanismo di elementi non armati a taglio (§ 4.1.2.3.5.1 delle [1]), Morsch (§ 4.1.2.3.5.2 delle [1]), Biskinis [§ C8.7.2.3.5 delle [2]]. La conversione da taglio resistente a taglio modificato per la cerniera mista passa attraverso la moltiplicazione per luce di taglio calcolata come descritto nel paragrafo 4.2.

## 5.6 VERIFICHE DA EFFETTUARE DURANTE GLI STEP DI PUSHOVER

Durante i vari passi incrementali di push-over si devono effettuare i seguenti controlli in corrispondenza dell'ubicazione della cerniera:

**Controllo di attivazione della cerniera mista.** Controllo del momento sollecitante  $M_s$  in corrispondenza dell'ubicazione della cerniera a flessione per determinare il passo di carico in cui attivare la cerniera ovvero il passo di carico per il quale il momento sollecitante  $M_s$  supera il momento di snervamento della sezione  $M_{y,mista}$ . Quando si ha l'attivazione della cerniera, il software al successivo step di carico aggiorna la matrice di rigidezza della struttura, annullando la rigidezza tangente della sezione che ha raggiunto la resistenza ultima (ciò corrisponde a considerare per l'elemento plasticizzato una rigidezza secante equivalente). Per maggiori dettagli si rimanda alla consultazione del manuale di Aedes.PCM.

**Controllo dopo l'attivazione della cerniera mista.** Il controllo serve a determinare l'eventuale superamento dei valori limite di stati limite (SLV, SLC). In ogni sezione plasticizzata si confronta la rotazione della corda corrente con la rotazione della corda ultima per SLV e SLC ( $\theta_{u,SLV}$  e  $\theta_{u,SLC}$  forniti al §5.2).

La rotazione della corda corrente è calcolata con le formule 3.11 del documento CNR DT212/2013 [4] di cui si riporta un estratto in figura seguente (Figura 10):

Il *drift* dell'elemento è definito come somma della deformazione flessionale e di quella a taglio. Esso può essere valutato alle due estremità del pannello, facendo riferimento al punto di flesso, attraverso le seguenti espressioni (Figura 3-2):

$$\theta_i = \varphi_i - \frac{u_i - u_0}{h'} \quad (3.11)$$

$$\theta_j = \varphi_j - \frac{u_0 - u_j}{h - h'}$$

dove:  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$  sono le rotazioni dei nodi  $i$  e  $j$ ;  $u_j$  e  $u_i$  sono rispettivamente gli spostamenti trasversali dei due nodi;  $h$  è l'altezza dell'elemento e  $h'$  la luce di taglio.

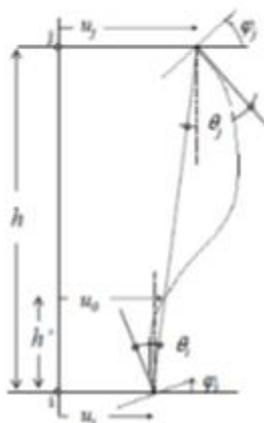


Fig. 3-2. Definizione delle grandezze utili al calcolo del *drift* secondo la (3.10)

Figura 10: Rotazione della corda corrente, CNR DT212/2013

Nelle formule (3.11) in figura, la luce di taglio  $h'$  viene individuata a partire dalle sollecitazioni di momento e taglio dovute alle azioni di tipo sismico ( $h' = M_{\text{sism}}/V_{\text{sism}}$ ).

NOTA:  $h'$  si distingue dalla luce di taglio  $L_v$  utilizzata per la definizione della rotazione ultima, eseguita al passo della plasticizzazione, calcolata in base alle sollecitazioni compressive  $M$  e  $V$  necessarie per generare la cerniera mista.

Per effetto delle verifiche di deformazione vengono quindi registrati i punti della curva in cui una sezione raggiunge per la prima volta la deformazione ultima SLV o SLC. Questo permetterà di limitare la capacità di spostamento della struttura in funzione degli stati limite dei singoli elementi (per ulteriori informazioni si rinvia al Manuale di PCM).

Al raggiungimento della rotazione della corda ultima per SLC, l'elemento viene definito collassato e scaricato: la sottocurva corrente viene interrotta e si riparte con una nuova sottocurva in cui l'elemento collassato ha rigidità flessionale nulla e gli elementi plasticizzati hanno rigidità secante equivalente.

Accanto ai controlli sulla cerniera occorre effettuare ad ogni step della pushover la **verifica di controllo del drift**: si controlla l'eventuale raggiungimento del massimo drift di piano per SLD e SLO (se necessario). Il superamento di tale condizione non determina l'interruzione dell'analisi.