

Francesco Pugi\*

## **ANALISI DI UN ARCO RIBASSATO CON CATENA E VERIFICA DI STABILITA' DEI PIEDRITTI**

\* Ricerca e Sviluppo di AEDES Software, [francesco.pugi@aedes.it](mailto:francesco.pugi@aedes.it)

- **La sicurezza di un sistema voltato arco+pedritti richiede la verifica di stabilità di tutti i componenti. In presenza di una catena, la spinta prodotta dall'arco alle imposte viene contrastata dalla trazione della catena e contribuisce a stabilizzare i pedritti.**
- **In generale, lo sforzo nella catena che deriva dall'analisi condotta con il modello rigido-fragile è lo sforzo necessario per assicurare la stabilità all'arco:** se l'arco è già di per sé stabile, come frequentemente avviene nel caso di un arco ribassato, lo sforzo nella catena può risultare basso se non nullo. La teoria di Heyman applicata all'arco infatti non prevede spostamenti infinitesimi della struttura ma l'improvviso collasso per perdita di equilibrio.
- **Quando ai fini della stabilità dell'arco la catena appare poco influente, la bassa trazione in essa rilevata dal calcolo dell'arco non è ben correlata al contrasto della spinta: per conseguenza nasce una problematica sulla verifica di sicurezza dei pedritti. E' quindi necessario **identificare un percorso di modellazione che consenta di eseguire in modo corretto e completo l'analisi di stabilità del sistema arco+pedritti.****
- Software di riferimento: Aedes.SAV, versione 2021.2.2
- Gli Utenti di SAV possono consultare il file di esempio associato:  
ArcoConCatena\_StabilitaPiedritti.zip  
(il file deve essere scompattato in C:\Aedes2021\Sav\Progetti)

## IL CASO STUDIO: SISTEMA VOLTATO CON ARCO RIBASSATO

Il caso studio consiste in un sistema voltato con arco ribassato, di spessore costante 25 cm., con luce 490 cm. e freccia 50 cm. e profondità 60 cm. Sull'arco insistono carichi permanenti e variabili da solaio; l'arco si imposta su muri perimetrali che si sviluppano in profondità (ossia nel piano ortogonale al piano dell'arco): si considera strutturalmente significativa una porzione di questi muri pari al doppio della profondità dell'arco: 120 cm (vd. figura seguente).

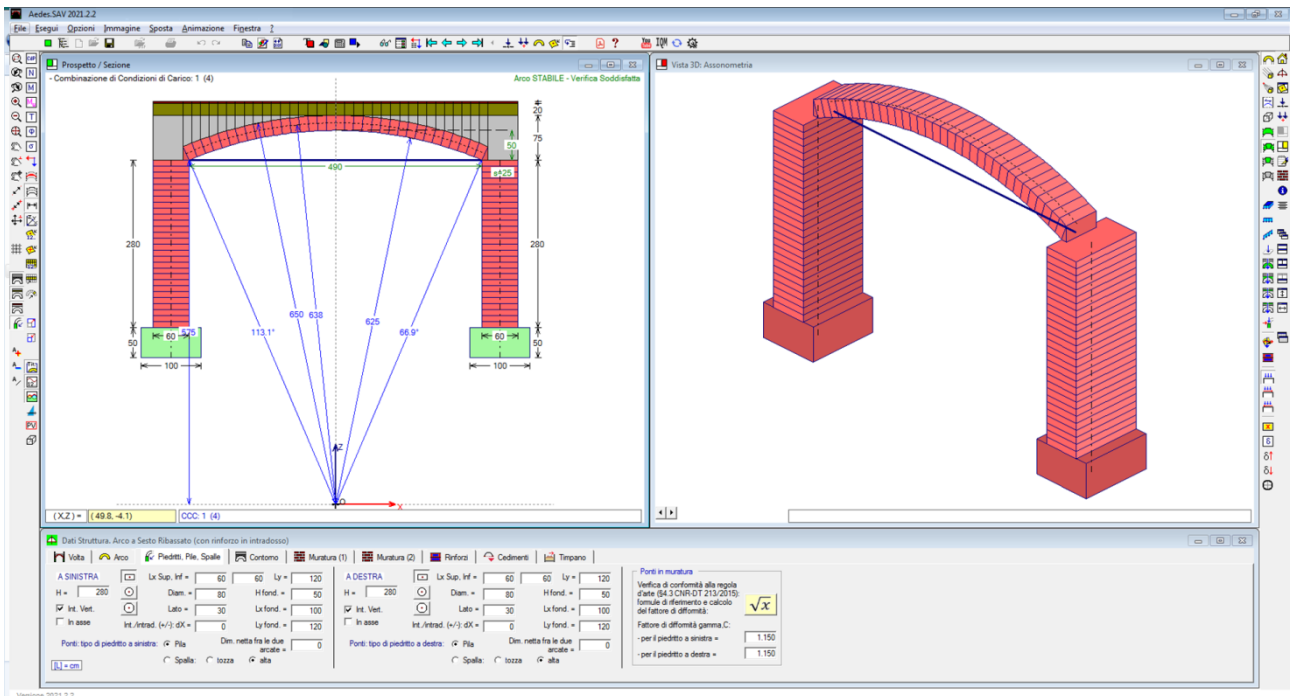


Fig. 1

## ANALISI STATICA

Si esamina anzitutto il comportamento statico.

Sono state inizialmente definite le seguenti CCE e CCC:

CCE (Condizioni di Carico Elementari): 3: 1) Permanenti strutturali e non strutturali, con  $\psi_2=1.00$ ; 2) Variabile su luce completa (effetti statici e sismici), con  $\psi_2=0.30$ ; 3) Variabile su metà luce (solo effetti statici), con  $\psi_2=0.30$  (dato superfluo, in quanto l'analisi sismica verrà condotta con la CCE 2: infatti il carico lineare della 2) ha attivi i check statico e sismici, mentre il carico lineare della 3) ha attivo solo il check statico):

N°	Commento	Psi.2 (quasi pem.)	P.p. volta	P.p. rinf.sx	P.p. rinf.dx	P.p. sottof.	P.p. pavim.	Carichi di superficie	Carichi lineari	Carichi concentrati	Forze aggiuntive sui piedritti
1	Permanenti strutturali e non strutturali	1.00	✓	✓	✓	✓	✓				
2	Variabile su luce completa (effetti statici e sismici)	0.30	✗	✗	✗	✗	✗				
3	Variabile su metà luce (solo effetti statici)	0.30	✗	✗	✗	✗	✗				

Fig. 2

CCC (Combinazioni di Condizioni di Carico statiche): 4:

N°	Commento	Molt.CCE n° 1	Molt.CCE n° 2	Molt.CCE n° 3	Pied.Sx Sp.att.	Pied.Sx Sp.pass.	Perc.Sx Sp.pass.	Pied.Dx Sp.att.	Pied.Dx Sp.pass.	Perc.Dx Sp.pass.
1	Carichi permanenti	0.90	1.00	0.00	✗	✓	30	✗	✓	30
2	Combinazione n° 2	0.90	0.00	1.00	✗	✓	30	✗	✓	30
3	Combinazione n° 3	1.35	1.50	0.00	✗	✓	30	✗	✓	30
4	Combinazione n° 4	1.35	0.00	1.50	✗	✓	30	✗	✓	30

Fig. 3

L'arco ribassato presenta una buona stabilità, ma i piedritti non risultano stabili a causa della forte spinta orizzontale. Si rileva che pur essendo stata definita una catena all'imposta, e più precisamente un tondo  $\Phi 32$  con  $f_{yd}=300 \text{ N/mm}^2$ , in grado di sostenere una forza di trazione massima (allo snervamento) pari a 241 kN, questa catena risulta scarsamente o addirittura non reagente. Questo appare in contraddizione con il comportamento atteso: la catena all'imposta deve infatti assorbire, almeno per quanto ne è capace, la spinta ribaltante verso l'esterno che tende ad instabilizzare i piedritti.

L'origine del problema consiste nel tipo di modellazione e di analisi: dopo aver illustrato le modalità di schematizzazione in SAV, si propone nel seguito una revisione del modello tale da superare il problema ed interpretare correttamente il comportamento strutturale, così come atteso.

In generale, inserendo una catena nel modello di un arco, lo sforzo nella catena che deriva dal calcolo è lo sforzo necessario per assicurare la stabilità all'arco: se l'arco è già di per sé stabile, come lo è l'arco ribassato dell'esempio, lo sforzo nella catena può risultare basso se non nullo.

La teoria di Heyman applicata all'arco infatti non prevede spostamenti infinitesimi della struttura ma l'improvviso collasso per perdita di equilibrio: si tratta di un modello rigido-fragile.

Però alle imposte dell'arco la spinta fisicamente esiste, come il modello stesso evidenzia: e questa, se non contrastata, instabilizza i piedritti. Per fare in modo che la catena riequilibri i piedritti,

agendo all'imposta dell'arco, occorre inserire alla sommità dei piedritti una forza aggiuntiva stabilizzante (orizzontale, verso l'interno) che rappresenta lo sforzo di trazione nella catena.

Si osservi che se la catena entrasse in trazione nel modello dell'arco, si può comunque aggiungere una forza stabilizzante in sommità ai piedritti, al massimo una forza tale che sommata alla trazione nella catena dovuta all'arco non superi la resistenza a trazione della catena stessa.

Risolvendo l'arco e rilevando le spinte alle imposte prodotte nelle diverse CCC, è possibile quindi inserire forze aggiuntive stabilizzanti.

Il metodo proposto in SAV è il seguente:

**a)** definire una nuova CCE (la n°4) contenente una forza aggiuntiva in sommità per ognuno dei due piedritti, pari a un valore standard di riferimento, ad es. 100 kN, avente effetto sia in analisi statica, sia in analisi sismica (fig. seg.):

**Dati Condizioni di Carico Elementari [CCE] (4)**

N°	Commento	Psi. 2 (quasi perm.)	P.p. volta	P.p. rinf. sx	P.p. rinf. dx	P.p. sottof.	P.p. pavim.	Carichi di superficie	Carichi lineari	Carichi concentrati	Forze aggiuntive sui piedritti
1	Permanenti strutturali e non strutturali	1.00	✓	✓	✓	✓	✓	[Icona]	[Icona]	[Icona]	[Icona]
2	Variabile su luce completa (effetti statici e sismici)	0.30	■	■	■	■	■	[Icona]	[Icona]	[Icona]	[Icona]
3	Variabile su metà luce (solo effetti stati~)	0.30	■	■	■	■	■	[Icona]	[Icona]	[Icona]	[Icona]
4	Catena in sommità piedritti	1.52	■	■	■	■	■	[Icona]	[Icona]	[Icona]	[Icona]

**CCE 4: Forze aggiuntive sui piedritti (2)**

N°	Pied. sx	F.X: + verso l'interno (kN)	F.Z: + verso il basso (kN)	E.X (dist. da intrad. arco + verso interno) (cm)	dist. da asse piedritto: + verso interno (cm)	E.Y (dist. da asse X) (cm)	Quota (da somm. pied. + verso il basso) (cm)	Stat.	Sism. + X	Sism. - X
1	✓	100.00	0.00	0.0	30.0	0.0	0.	✓	✓	✓
2	■	100.00	0.00	0.0	30.0	0.0	0.	✓	✓	✓

Effetti sia statici che sismici

**Fig. 4**

(nell'immagine del form in fig. 4 si rileva per la nuova CCE il valore di  $\psi_2$  pari a 1.52, il cui significato verrà illustrato nel seguito)

**b)** applicare ad ogni CCC un coefficiente di combinazione della nuova CCE contenente le due forze aggiuntive tale da contrastare la spinta alle imposte prodotta dall'arco, ovviamente in modo tale che il valore della forza standard moltiplicato il coefficiente di combinazione non superi la resistenza a trazione della catena. In pratica, avendo rilevato l'entità della spinta alle imposte per ognuna delle CCC, è possibile calibrare questo coefficiente. Per il caso in esame ne deriva la situazione illustrata nelle immagini seguenti.

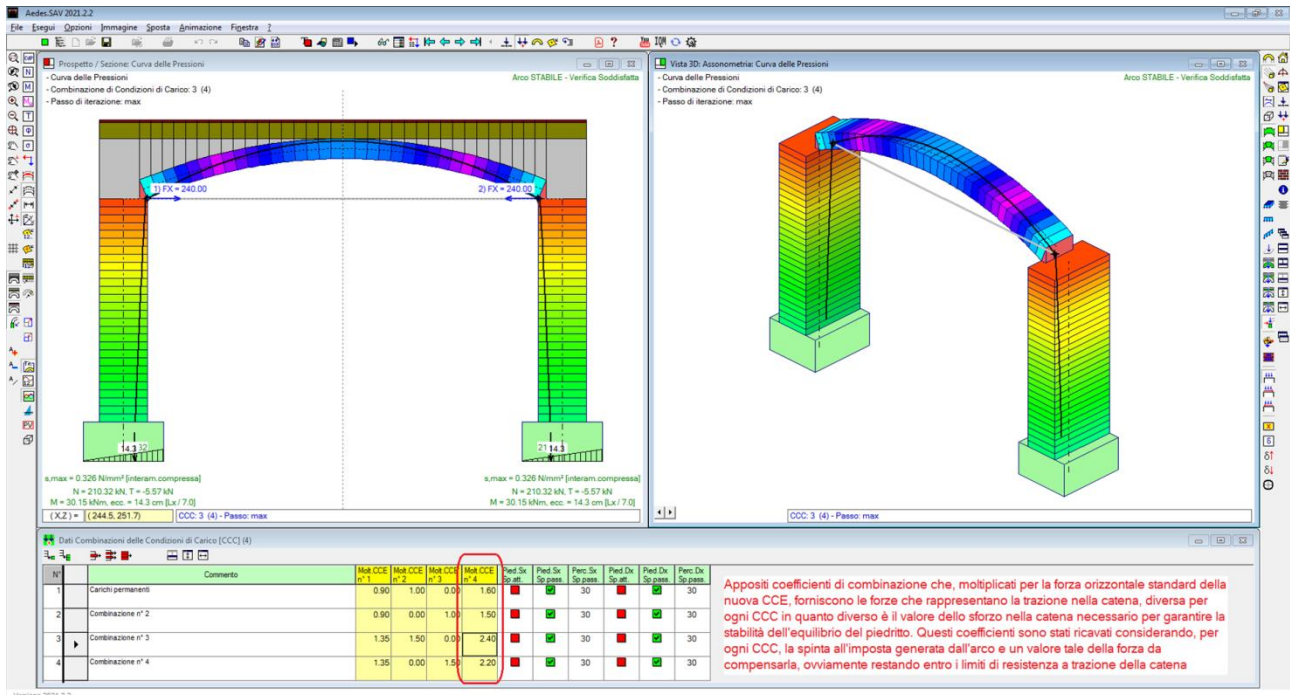


Fig. 5

In fig. 5 sono evidenziati, in un riquadro in colore rosso, gli appositi coefficienti di combinazione che, moltiplicati per la forza orizzontale standard della nuova CCE, forniscono le forze che rappresentano la trazione nella catena, diversa per ogni CCC in quanto diverso è il valore dello sforzo nella catena necessario per garantire la stabilità dell'equilibrio del piedritto. Questi coefficienti sono stati ricavati considerando, per ogni CCC, la spinta all'imposta generata dall'arco e un valore tale della forza da compensarla, ovviamente restando entro i limiti di resistenza a trazione della catena. Ad esempio, considerando la CCC 3 graficizzata nell'immagine precedente, la spinta che si era rilevata (245 kN) è illustrata nell'immagine seguente ed ha condotto alla stima di una forza aggiuntiva pari a 240 kN, richiedendo quindi il coefficiente di combinazione 2.4 rispetto al valore standard di 100 kN definito nella CCE:

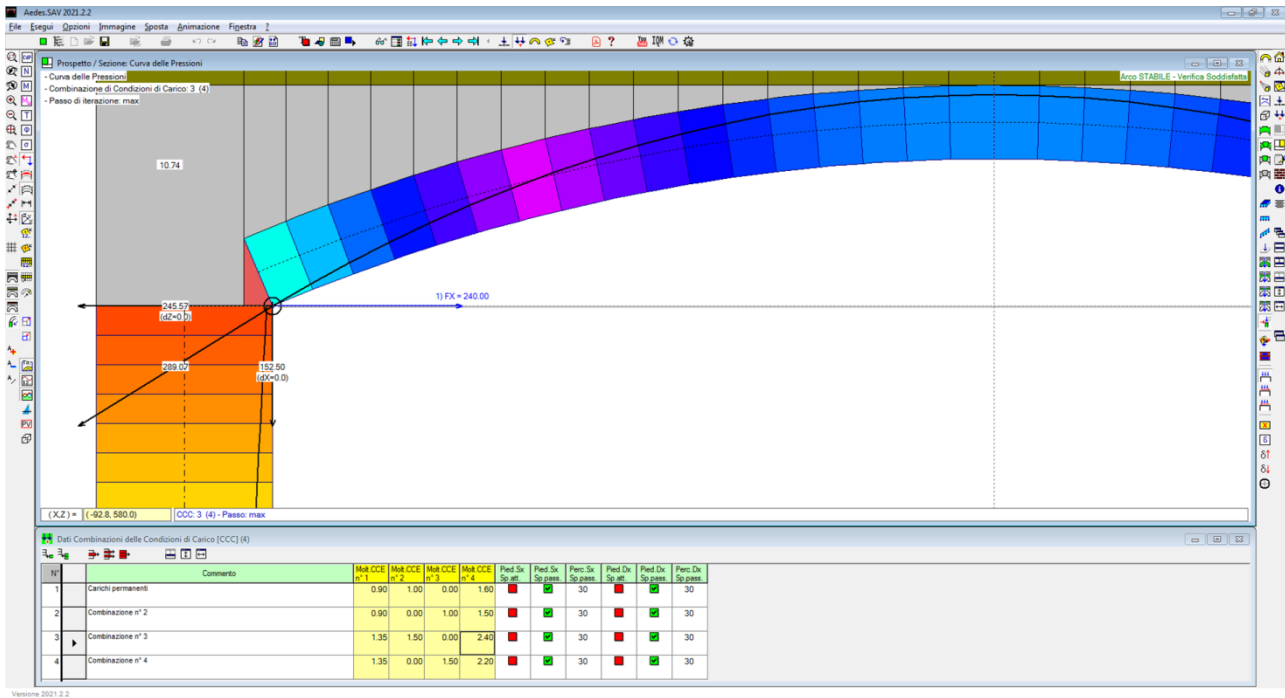


Fig. 6

Dal punto di vista statico, tutte le 4 CCC garantiscono ora stabilità sia all'arco sia ai piedritti, come mostra lo schema dei risultati (immagini del Rapporto di Elaborazione per l'Analisi Statica, ottenuto ruotando le 4 CCC: tutte le verifiche di sicurezza sono soddisfatte):

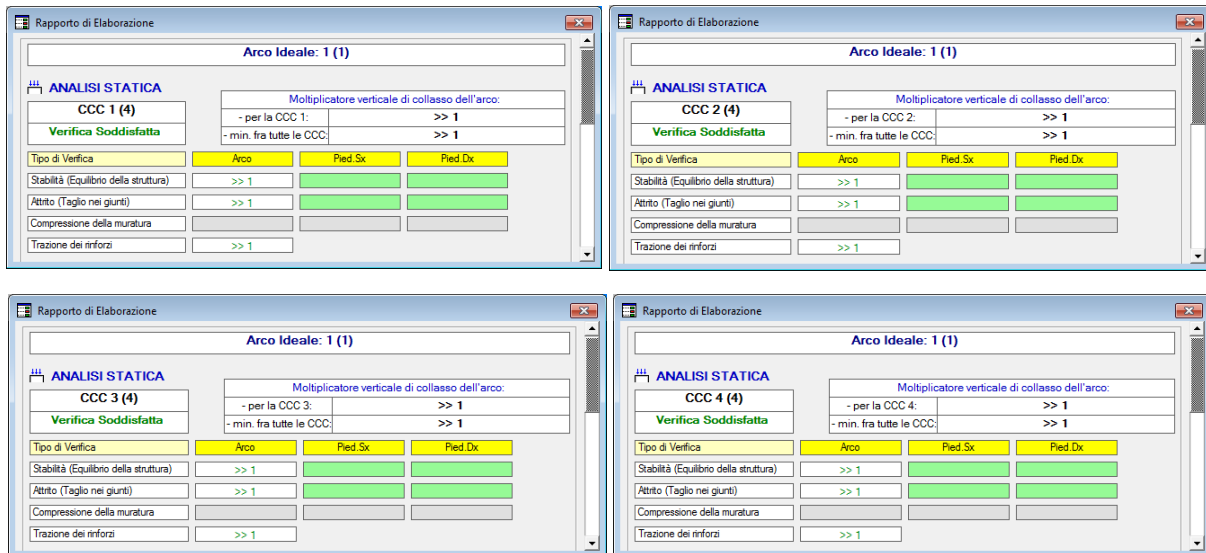


Fig. 7

## ANALISI SISMICA

Si consideri ora l'analisi sismica.

SAV costruisce la combinazione sismica a partire dalle CCE, i cui carichi vengono assemblati affetti dai coefficienti  $\psi_2$ : nell'assemblaggio, vengono considerati solo i carichi agenti sismicamente (ad es. la CCE 3, come sopra osservato, è ininfluenza dal punto di vista sismico).

Avendo definito 'agenti sismicamente' anche le forze aggiuntive in sommità dei piedritti definiti nella nuova CCE n°4, anche queste verranno affette dal coefficiente  $\psi_2$  della CCE n°4, e questo determinerà, in modo del tutto analogo ai coefficienti di combinazione statici, il valore dello sforzo nella catena considerato in analisi sismica.

Ora: l'analisi sismica viene condotta lungo la direzione orizzontale X nel piano dell'arco nei due versi +X e -X, e quindi in due combinazioni sismiche: ciò implica che in generale ci saranno due diversi possibili valori del coefficiente  $\psi_2$  della CCE n°4, rispettivamente per +X e -X.

Quando la struttura in esame è simmetrica, come nel caso studiato, è possibile semplificare la procedura definendo, come si è fatto nel caso studiato, una sola CCE aggiuntiva; altrimenti sarebbe stato necessario distinguere le CCE e i contributi delle forze aggiuntive statico, sismico +X e sismico -X.

In ogni caso, la sostanza del ragionamento non cambia: c'è un fattore  $\psi_2$  moltiplicativo della forza standard che permette di rappresentare lo sforzo di trazione attribuito alla catena durante l'analisi sismica.

E' quindi possibile ricercare se esiste un valore di  $\psi_2$  tale da garantire un moltiplicatore di collasso sufficientemente alto per ottenere, a livello di indicatore di rischio sismico  $\zeta_E$ , una verifica di sicurezza soddisfatta per il sistema *arco + piedritti* (nel caso in esame, il moltiplicatore di collasso dell'arco ribassato è assai elevato, ed il punto critico risiede nella stabilità dei piedritti, il cui moltiplicatore di collasso sismico è inferiore rispetto a quello dell'arco).

Tramite alcuni tentativi, si individua nel valore  $\psi_2=1.52$  (cfr. fig. 4) il periodo di ritorno massimo sostenibile dal sistema *arco + piedritti*: per i piedritti si ha infatti  $T_R=780$  anni che corrisponde a  $\zeta_E=1.201$ , con verifica di sicurezza ampiamente soddisfatta (vd. fig. 8).

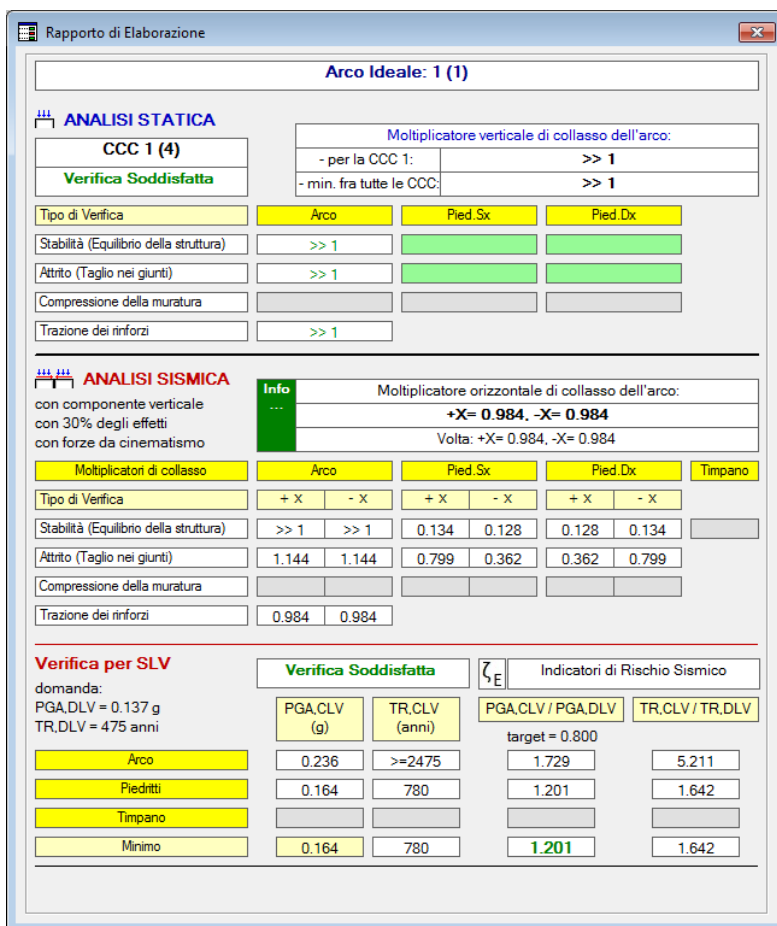


Fig. 8

La posizione della curva delle pressioni in corrispondenza del valore del moltiplicatore di collasso (0.128, moltiplicatore minimo, registrato con la crisi di stabilità del piedritto come si rileva dalla fig. 8) è illustrata in fig. 9 (riferita all'analisi +X) e spiega graficamente un aspetto importante.

Con  $\psi_2 < 1.52$  la trazione nella catena costituisce uno sforzo minore in grado di stabilizzare meno la struttura: la curva delle pressioni alla base del piedritto destro fuoriesce verso l'esterno per un moltiplicatore di collasso inferiore (con  $\psi_2 = 1.51$  si ottiene  $T_R = 706$  anni).

Ma anche con  $\psi_2 > 1.52$  la struttura è meno stabile rispetto a  $\psi_2 = 1.52$  (con  $\psi_2 = 1.53$  si ottiene  $T_R = 688$  anni): lo sforzo troppo alto nella catena determina nel piedritto sinistro la fuoriuscita della curva delle pressioni verso l'interno della struttura.



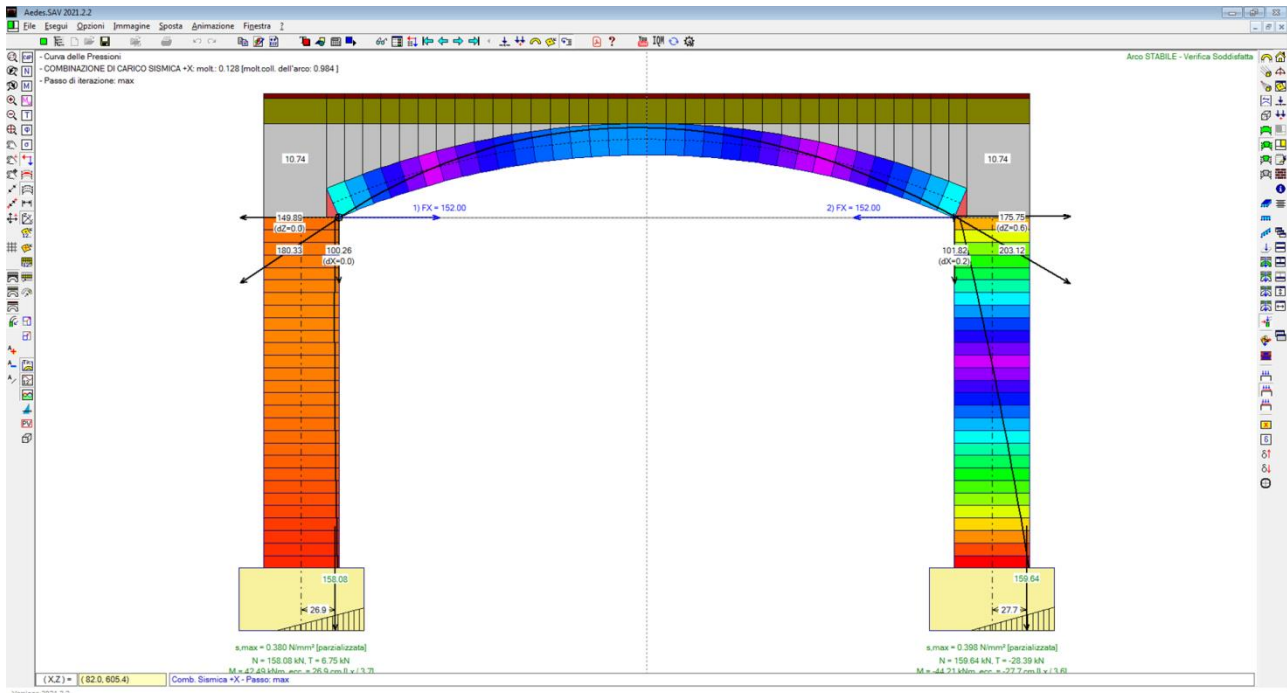


Fig. 9

In definitiva a  $\psi_2=1.52$  (cioè a uno sforzo nella catena pari a 152 kN) corrisponde il risultato sismico migliore:  $T_R=780$  anni è la massima capacità in termini di periodo di ritorno compatibile con una soluzione equilibrata e tale da garantire la resistenza della catena.

## SINTESI DEL PERCORSO DI ANALISI

Per rappresentare correttamente il ruolo di una catena interposta fra arco e piedritti nelle verifiche di stabilità, è possibile utilizzare in SAV forze aggiuntive definite alla sommità dei piedritti. Più precisamente, i diversi sforzi nella catena competenti alle CCC statiche e alle combinazioni sismiche si possono gestire definendo semplicemente una nuova CCE con una forza aggiuntiva standard di riferimento, ed agendo:

- per l'analisi statica: sui coefficienti moltiplicativi delle CCE nelle CCC;
- per l'analisi sismica: sui coefficienti  $\psi_2$  delle CCE.

In analisi statica, i valori dei coefficienti moltiplicativi vengono calibrati sulla base delle spinte trasmesse alla sommità del piedritto dall'imposta dell'arco.

In analisi sismica, i valori dei coefficienti  $\psi_2$  relativi alle CCE contenenti le forze aggiuntive standard possono essere indagati per tentativi, ricercando il massimo valore dello sforzo nella catena che assicura la stabilità dell'equilibrio o più in generale la verifica di sicurezza soddisfatta.

In entrambe le analisi statica e sismica, si ribadisce che lo sforzo applicato attraverso i coefficienti di combinazione deve essere tale da non eccedere la resistenza della catena (o la sua quota-parte che si ritiene di dover considerare ai fini della sicurezza), considerando anche l'eventuale sforzo nella catena stessa prodotto dall'arco e rilevato attraverso l'analisi di stabilità dell'arco stesso (sforzo che nel caso di archi tendenzialmente stabili, quali i ribassati con sufficiente spessore come l'arco studiato nel presente lavoro, può essere anche molto basso se non addirittura trascurabile).