

Analisi di ponte ferroviario in muratura

L'utilizzo di un software professionale dedicato alle costruzioni in muratura per l'analisi strutturale dei ponti

Giacomo Sevieri – Ph.D. student, Università di Pisa & TU Braunschweig

Francesco Pugi - Aedes Software, San Miniato (Pi)

Introduzione

In questo esempio verrà valutata la sicurezza strutturale di un ponte ferroviario in muratura; data l'analogia con i ponti stradali si è ritenuto opportuno fare riferimento alle indicazioni delle CNR-DT 213/2015: "Istruzioni per la valutazione della sicurezza strutturale di ponti stradali in muratura".

La valutazione della sicurezza richiede la conoscenza approfondita dell'opera in termini di storia, geometria e caratteristiche del materiale. Nell'esempio proposto l'attenzione viene concentrata sull'analisi strutturale, globale e cinematica, operando alcune ipotesi semplificative su altri aspetti, certamente non secondari, riguardanti le condizioni al contorno, quali l'interazione con il terreno alle spalle, con il terreno di fondazione e con l'alveo. La modellazione e le elaborazioni di calcolo sono state sviluppate con il software Aedes.PCM, versione 2016, dedicato all'analisi strutturale delle costruzioni in muratura.

Descrizione della struttura

Il ponte in muratura oggetto di studio è composto da cinque arcate di luce pari a 12 m; le pile sono lievemente rastremate con porzione esterna in muratura di mattoni pieni e malta di calce e nucleo interno in muratura di pietrame disordinato. Alla base la sezione esterna ha dimensioni 220x1035 cm, mentre il nucleo interno ha dimensioni pari a 146x961 cm. Le dimensioni in pianta sono di circa 73.5 m (longitudinale) x 10.35 m (trasversale); l'altezza massima in corrispondenza delle pile più alte è di circa 19.90 m.

Il piano ferroviario è definito da un riempimento con uno spessore di circa 1 m e peso specifico di 16 kN/m³.



Figura 1 – Prospetto del ponte oggetto di studio.

Modellazione

Generalità ed istruzioni normative

Le istruzioni CNR-DT 213/2015 al paragrafo 8.3 pongono particolare attenzione sugli aspetti di modellazione. In questo capitolo delle istruzioni sono indicate le linee guida da seguire nella modellazione del ponte a seconda della natura del modello. Il modello che andiamo a presentare è un ibrido tra la modellazione denominata al capitolo 8.3.2 “Modellazione piana del ponte” ed una modellazione tridimensionale. Viene infatti utilizzata una modellazione denominata a blocchi e giunti, implementata in Aedes.PCM, che consente di studiare un arco, o una serie di archi attraverso la schematizzazione con elementi monodimensionali. Se collegati in modo corretto, tali elementi consentono di rappresentare adeguatamente anche il comportamento trasversale della struttura. Un approccio del genere è sicuramente di tipo semplificato, ma a vantaggio di sicurezza. Vengono trascurati il contributo resistente del riempimento, considerato solo un carico, e di altri elementi secondari, che potrebbero concorrere all’aumento di capacità della struttura, considerandoli tuttavia come pesi portati. In un’integrazione apposita del presente lavoro sarà quindi necessario eseguire adeguate verifiche strutturali su tali elementi.

Modello proposto

Il modello proposto da Aedes.PCM è denominato a blocchi e giunti ed è composto da elementi asta che descrivono la geometria della struttura; a partire da essa il programma ricerca la posizione della curva delle pressioni e nel caso in cui il suo allontanamento dall’asse determini la rottura di un elemento dell’arco, in quel punto viene inserita una cerniera.

Con la metodologia proposta è possibile controllare in modo semplice ed efficace la posizione della curva delle pressioni in analisi statica e sismica, consentendo l’analisi di vulnerabilità dell’opera.

Caratteristiche dei materiali e coefficienti

Data la disomogeneità dei materiali costituenti le pile è stato definito un materiale con caratteristiche omogenee, determinate imponendo la congruenza nella deformazione assiale dell’elemento:

$E = 1112 \text{ Mpa};$

$G = 445 \text{ Mpa};$

$\gamma = 18.6 \text{ kN/m}^3.$

La resistenza è stata assunta coincidente con il materiale esterno (di migliore qualità), i valori così determinati dovranno essere ridotti a seconda del livello di conoscenza o dal livello di difformità rispetto alla regola dell’arte, concetto introdotto nelle CNR-DT 213/2015.

Ipotizziamo, nel caso in esame, che sia stata condotta una campagna d’indagine esaustiva, nei riguardi della storia, della tecnologia della struttura e delle caratteristiche meccaniche della stessa. In questo modo possiamo assumere un livello di conoscenza pari a 3 con fattore di confidenza $F_c=1$. In questo modo la riduzione delle caratteristiche meccaniche sarà legato solo al fattore di difformità γ_c . Ipotizziamo che in questo caso vi sia un’assoluta conformità tra la struttura e la tecnologia costruttiva, la “regola dell’arte”. In questo modo otteniamo un pari a $\gamma_c = 0.85$; non essendo però permesso un aumento delle caratteristiche del materiale, il fattore di confidenza complessivo è comunque pari a 1.

In ogni caso, Aedes.PCM consente analisi di stabilità che prescindono dalla resistenza: nello spirito della teoria di Heyman, la stabilità delle pile viene studiata attraverso la posizione delle curva delle pressioni. Se

questa fuoriesce in una sezione della pila, viene inserita una sconnessione interna che determina una diminuzione del grado di iperstaticità del sistema. Durante un'analisi incrementale, quale la pushover, la progressiva diminuzione del grado di vincolamento interno conduce alla labilità generale, con conseguente arresto della curva di capacità.

Azioni

Nel capitolo 3.7 delle istruzioni vengono fornite le indicazioni relative ai carichi. In seguito indichiamo come sono stati introdotti nel software.

Azioni permanenti

Le azioni permanenti si dividono in tre categorie:

- pesi propri di elementi strutturali e non strutturali g_1 : vengono determinati automaticamente dal software sulla base della geometria e del peso proprio attribuito ai materiali.

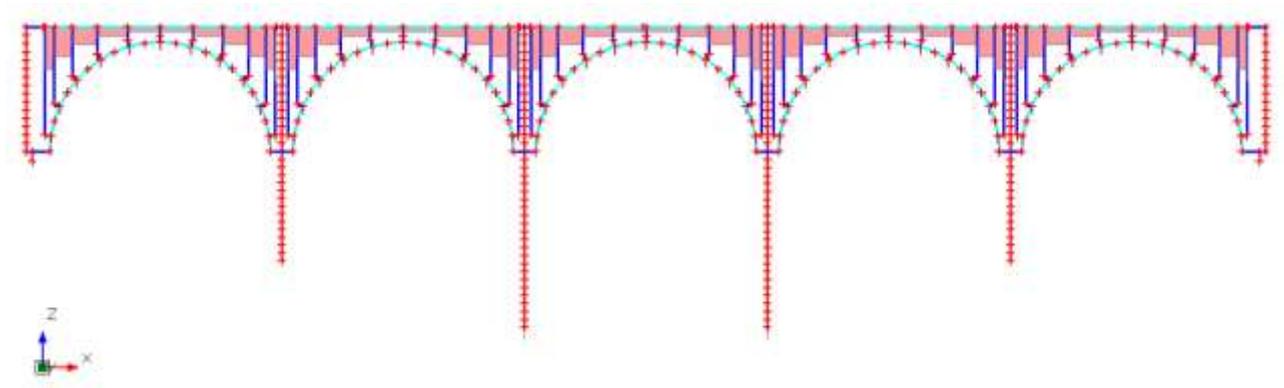


Figura 2 – Prospetto del modello di calcolo.

- carichi permanenti portati g_2 : essi dovranno essere inseriti manualmente come azione verticale, nel caso in esame è stato stimato un carico pari a 51.67 kN/m per ogni allineamento di archi.
- carichi permanenti portati di altra natura g_3 : anche carichi di questa natura, come i precedenti dovranno essere inseriti manualmente.

Altre azioni

Le altre tipologie di carico si dividono in:

- Carichi mobili inclusivi degli effetti dinamici, q_{vk} , desunti dalle NTC08: nel caso in esame è stato utilizzato un treno di carico LM 71 che prevede un $q_{vk}= 80$ kN/m.
- Carichi sui marciapiedi, pari a 10 kN/m², e non combinato con i carichi verticali.
- Azione laterale (Serpeggio), dovrà essere inserita manualmente, ed è stata assunta in accordo con le NTC08: $Q_{sk}= 100$ kN.
- Azioni di avviamento e frenatura: devono essere inserite manualmente, sono state assunte pari a:

$$Q_{a,k}= 33 \text{ [kN/m]} * L[\text{m}] \leq 1000 \text{ kN};$$

$$Q_{b,k} = 20 \text{ [kN/m]} * L[m] \leq 6000 \text{ kN};$$

Azioni ambientali variabili

Le azioni ambientali dovranno essere inserite manualmente:

- Azione del vento;
- Azione termica.

In questo esempio le azioni termiche sono state trascurate in quanto il loro effetto è considerato secondario nelle strutture murarie.

Modellazione

Input geometrico

Il ponte in muratura oggetto di studio è stato modellato ed analizzato con la versione 2016 di Aedes.PCM. Per prima cosa è necessaria la definizione del modello architettonico, il cui primo step sta nella definizione dei livelli. Nel caso specifico, è stato definito un solo livello di altezza pari alla massima altezza del ponte, dall'alveo alla carreggiata, pari a 17.416 m. Una volta impostato il livello, vengono impostati i materiali che verranno utilizzati nel modello strutturale.

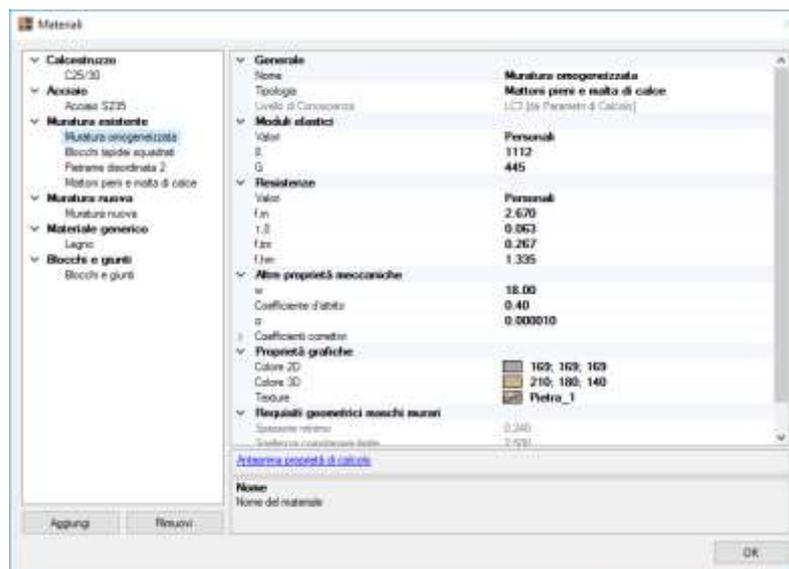


Figura 3 – Caratteristiche dei materiali in PCM 2016.

Iniziamo la modellazione inserendo per prime le pile, definendone sezione, passo di discretizzazione e sfalsandole in altezza per rappresentare fedelmente la geometria del ponte.

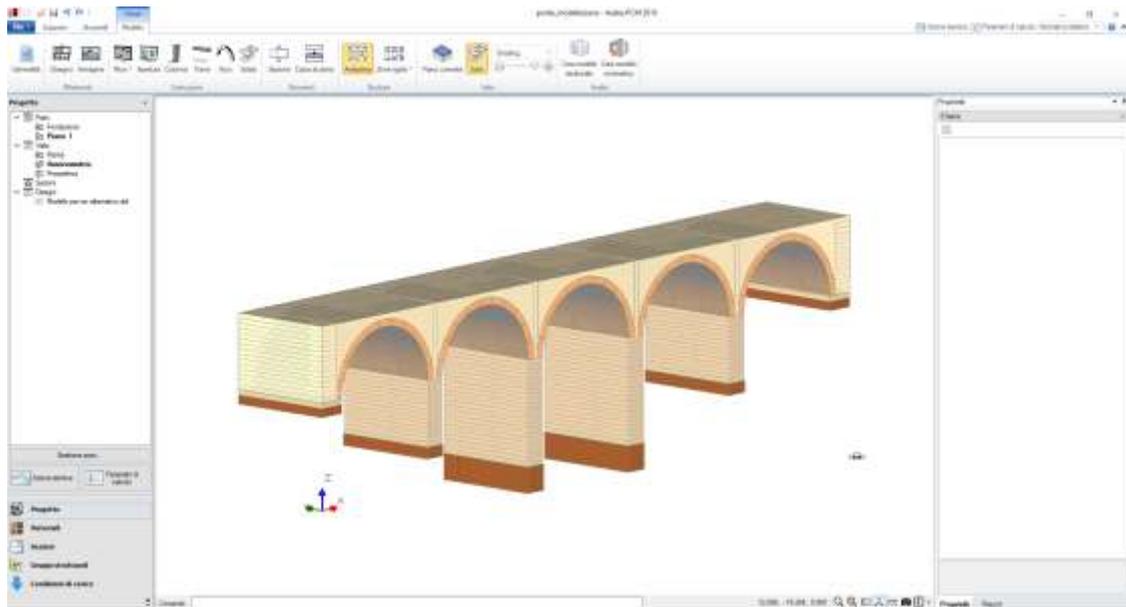


Figura 6 – Modello architettonico completo, PCM 2016.

Completato l'input architettonico, verranno generati il modello strutturale globale ed il modello cinematico.

Modello strutturale

Avendo inserito tre allineamenti di archi il modello strutturale generato avrà una natura tridimensionale, necessaria per valutare le torsioni generate dal carico veicolare eccentrico rispetto all'asse dello stesso. Il modello così generato deve essere ulteriormente elaborato inserendo dei collegamenti rigidi tra le arcate parallele: questo consentirà di ripristinare la continuità del piano viario.

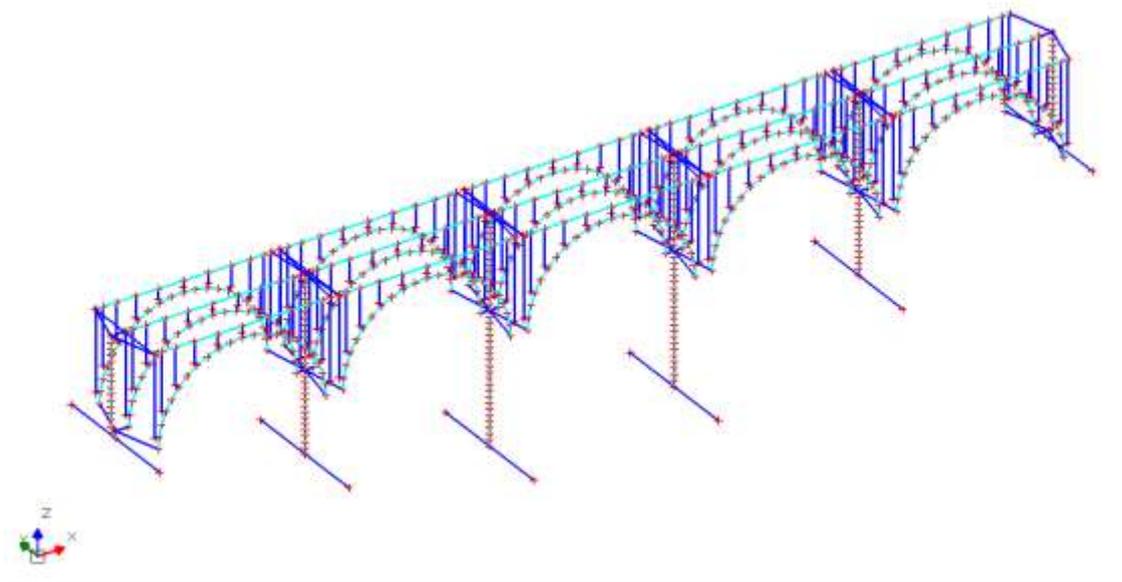


Figura 7 – Modello strutturale senza collegamenti trasversali, PCM 2016.

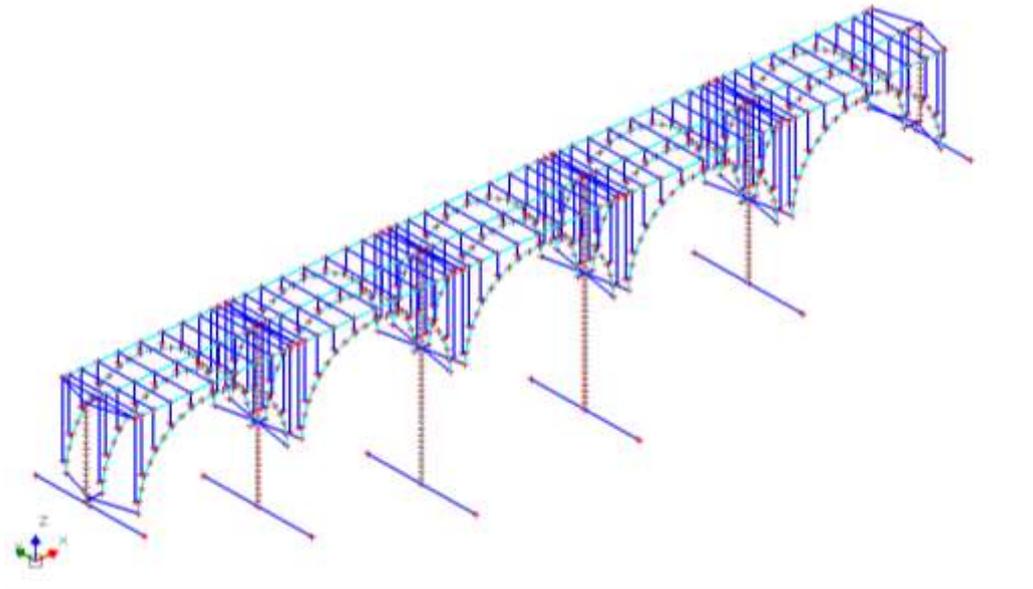


Figura 8 – Modello strutturale con collegamenti trasversali, PCM 2016.

Successivamente sono stati inseriti manualmente i carichi veicolari ed ambientali. In relazione ai carichi veicolari sono due le configurazioni di treni di carico da considerare: una prima stesa relativa a metà campata su entrambe i binari, in modo da massimizzare gli effetti del momento flettente, ed una seconda stesa inerente ad un solo binario, ma lungo tutta la lunghezza del ponte, in modo da massimizzare la torsione e quindi penalizzare il comportamento trasversale della struttura.

Analisi

Introduzione

In accordo con quanto dichiarato dalle NTC08 e dalle Istruzioni, verranno svolte sia le analisi statiche che sismiche.

Aedes.PCM consente anche analisi statiche indipendenti dalla pushover; con esse è possibile studiare l'assetto della struttura sotto i carichi verticali, ad esempio per determinare la posizione statica della curva delle pressioni. Le analisi modali provvedono inoltre a caratterizzare dinamicamente la struttura, e fra i risultati forniscono le masse partecipanti. Dal punto di vista della pushover, le distribuzioni di forze modali assegnano l'incremento di taglio progressivo nel rispetto della legge di distribuzione delle azioni orizzontali secondo il modo principale, o in alternativa secondo una proporzionalità con le masse. Le masse, di tipo nodale, sono distribuite in tutta la struttura e quindi, in assenza di relazioni di rigidità reciproche, forniscono una efficace descrizione del comportamento dinamico. Come post-elaborazione della pushover, è poi possibile operare direttamente sul moltiplicatore di collasso, seguendo un'impostazione tipica dello studio dei cinematismi, oppure si può seguire la via dell'oscillatore elastoplastico equivalente (quest'ultima sembra tuttavia più appropriata per tipologie edilizie quali i fabbricati multipiano). In definitiva, si individua il valore sostenibile di PGA (capacità), con confronto con i valori richiesti dalla Normativa e conseguente definizione dell'indicatore di rischio sismico.

Analisi modale

Lo studio delle forme modali della struttura può essere d'aiuto per capire il comportamento dinamico del ponte per evidenziare eventuali anomalie. Dei 19 modi elaborati vengono mostrati solo i principali; nelle figure sottostanti oltre alle deformate modali vengono mostrate le posizioni delle masse utilizzate nell'analisi.

- Modo 1: $T = 1.061$ s; $M_x = 64.0$ %; $M_y = 0.0$ %

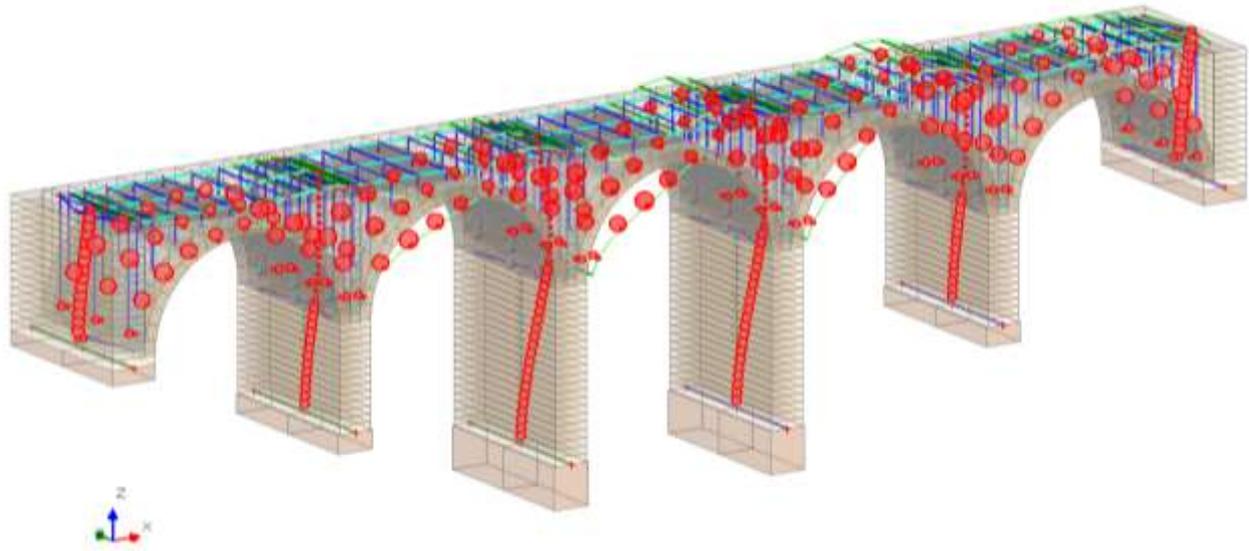


Figura 9 – Primo modo di vibrare, PCM 2016.

- Modo 2: $T = 0.714$ s; $M_x = 0.0$ %; $M_y = 66.2$ %

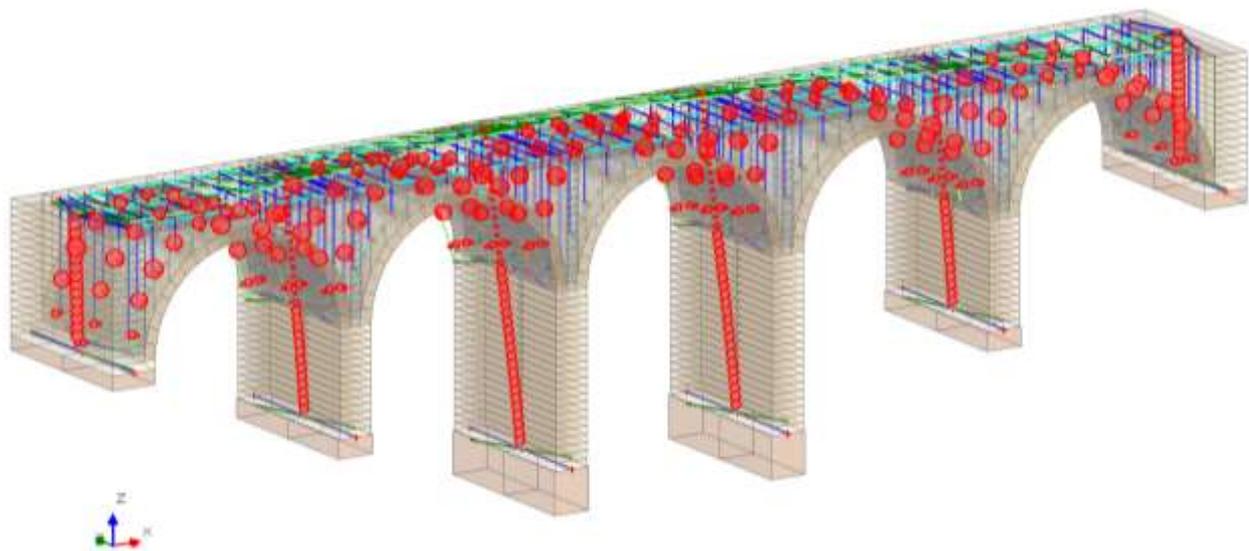


Figura 10 – Secondo modo di vibrare, PCM 2016.

Dall'analisi dei modi di vibrare osserviamo che non si presentano anomalie nel modello, sia in termini di modi di vibrare che di distribuzione delle masse.

Analisi non sismica

Introduzione

Lo studio di vulnerabilità di una struttura richiede un'analisi iniziale in campo statico. Oltre a questo, è molto importante sottolineare come sia necessaria non solo l'analisi strutturale globale, ma anche quella cinematica, così come evidenziano anche le istruzioni CNR DT 213/2015.

Analisi strutturale globale

Dovranno essere analizzate due configurazioni di carico mobile, la prima relativa a metà campata che massimizza gli effetti longitudinali, e la seconda con una stesa di carico che prende tutta la lunghezza del ponte, per massimizzare gli effetti trasversali, come mostrato in figura.

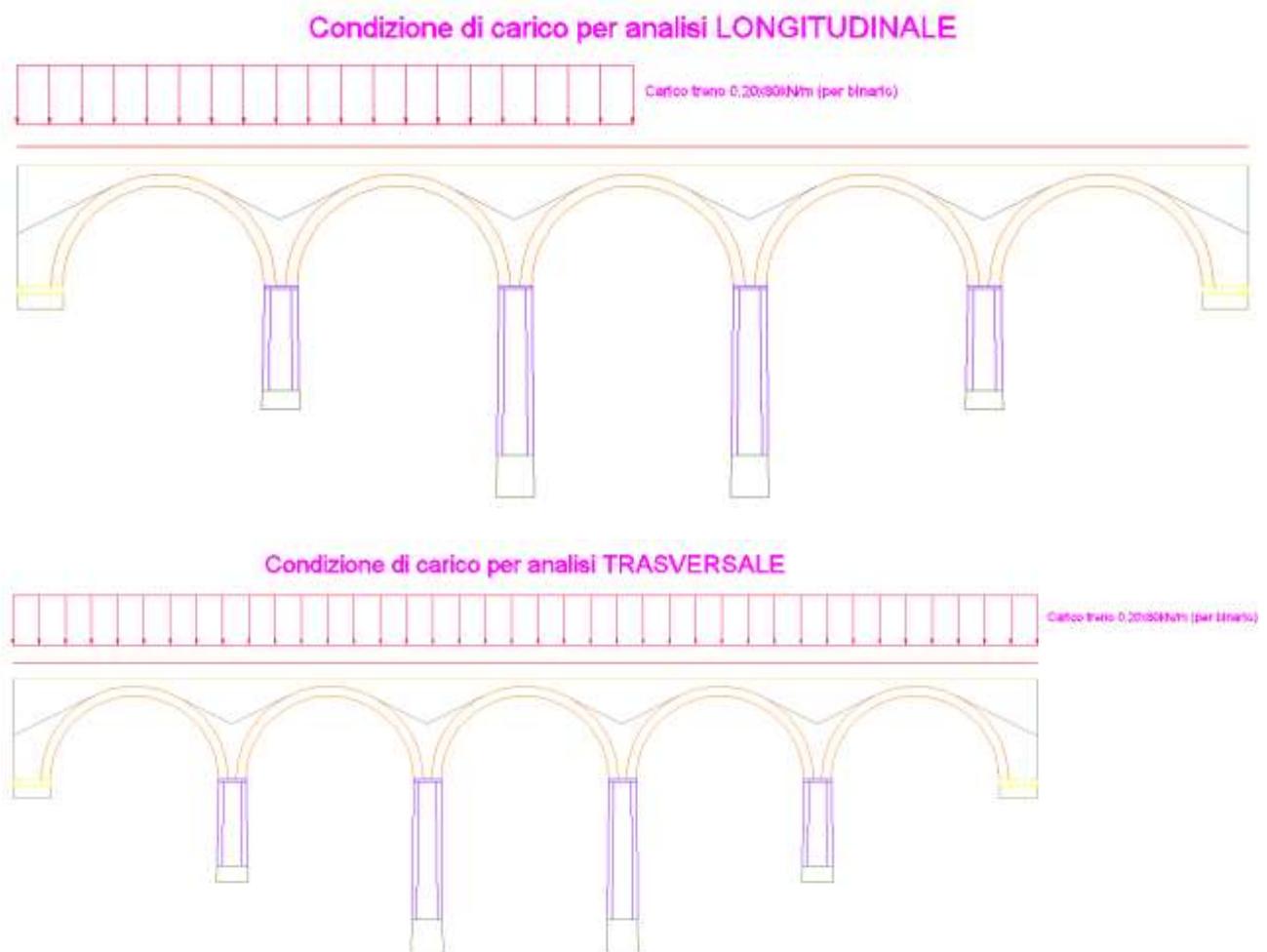


Figura 11 – Condizioni di carico prese in considerazione per l'analisi.

Come illustrato in precedenza, le verifiche sono state condotte controllando la posizione della curva delle pressioni.

• Condizione di carico longitudinale

Analizzando i risultati dell'analisi statica nella condizione di carico che massimizza gli effetti longitudinali osserviamo che la curva delle pressioni rimane sempre interna alla sagoma degli archi, se non alle spalle della struttura. In ogni caso la formazione delle cerniere alle imposte non implica il collasso della struttura. Nelle immagini seguenti vengono mostrate l'esito delle verifiche statiche ed il dettaglio della curva delle pressioni nell'arcata centrale.

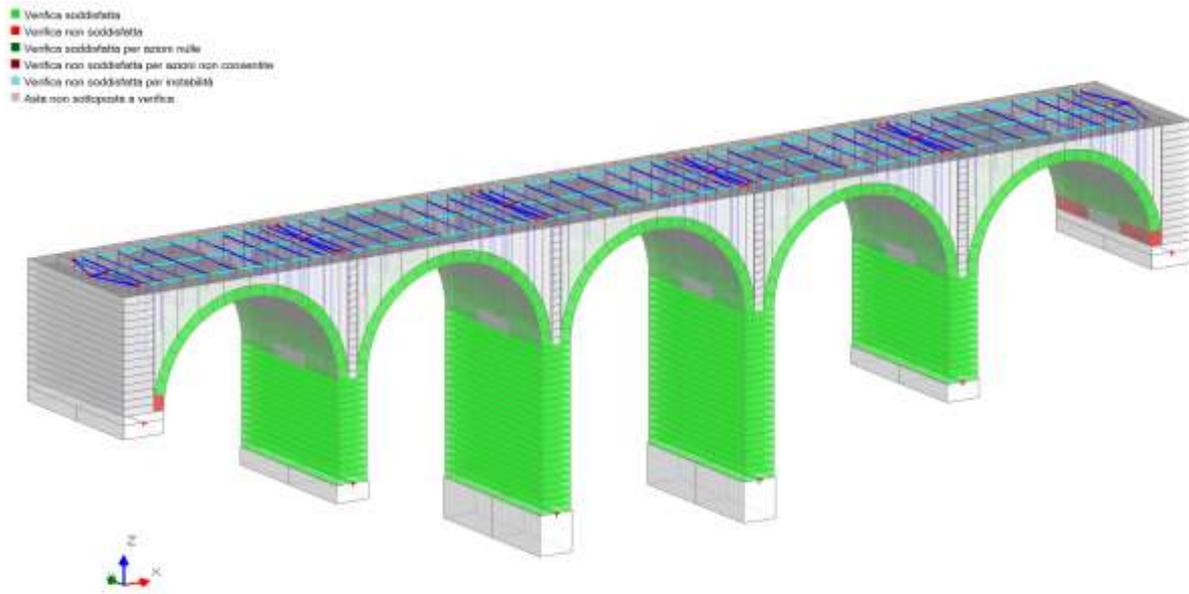


Figura 12 – Esito delle analisi statiche non sismiche, relative alla condizione di carico longitudinale, PCM 2016.

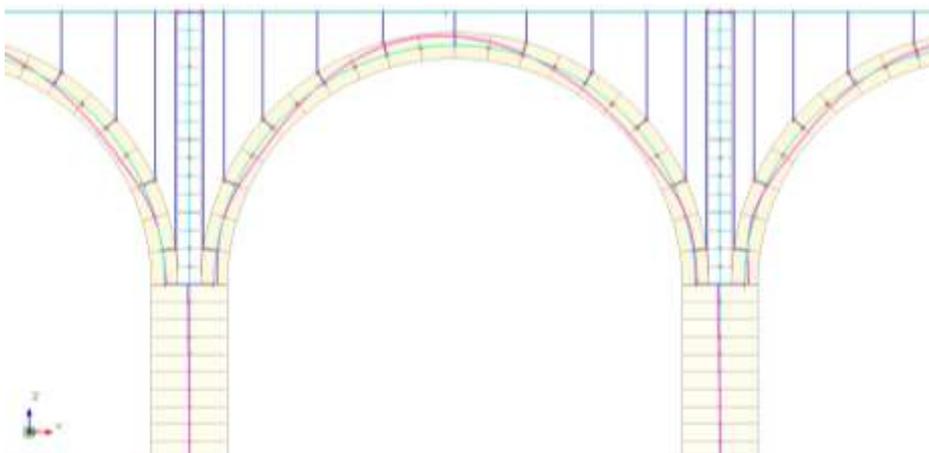


Figura 13 – Curva delle pressioni dell'arcata centrale in analisi statica non sismica, relativa alla condizione di carico longitudinale PCM 2016.

• Condizione di carico trasversale

Analogamente alla condizione di carico precedente analizziamo il caso di azione che massimizza gli effetti trasversali della struttura. Le ipotesi alla base della metodologia di analisi e di verifica sono le stesse del caso precedente. Anche in questo caso possiamo osservare come i conci adiacenti alle spalle della struttura non soddisfino le verifiche, ma globalmente la struttura resta in sicurezza.

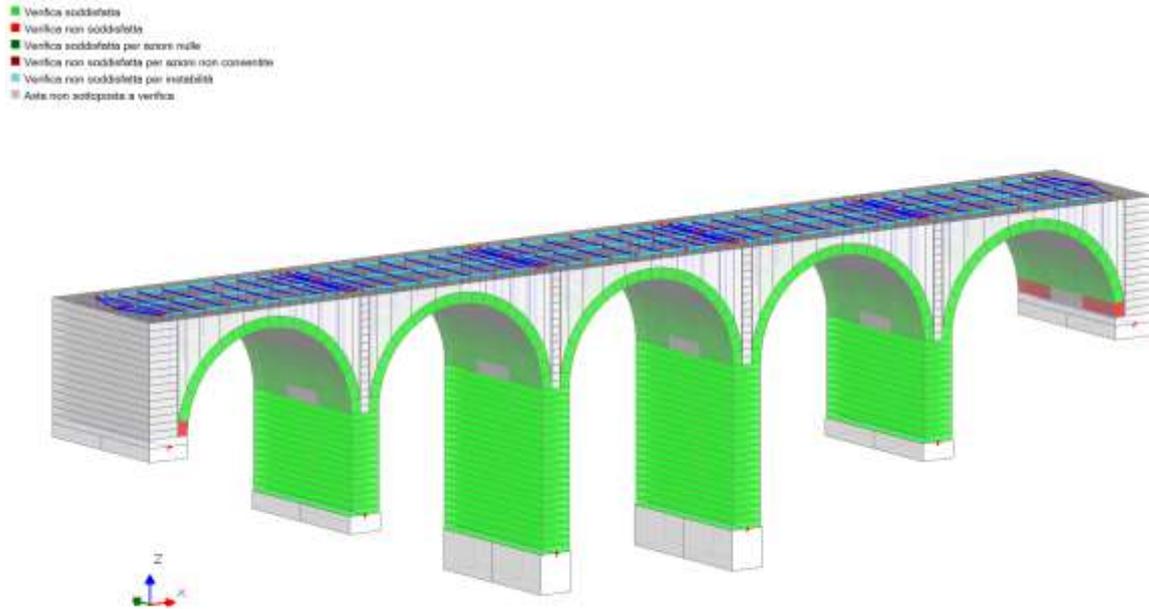


Figura 14 – Esito delle analisi statiche non sismiche, relative alla condizione di carico trasversale, PCM 2016.

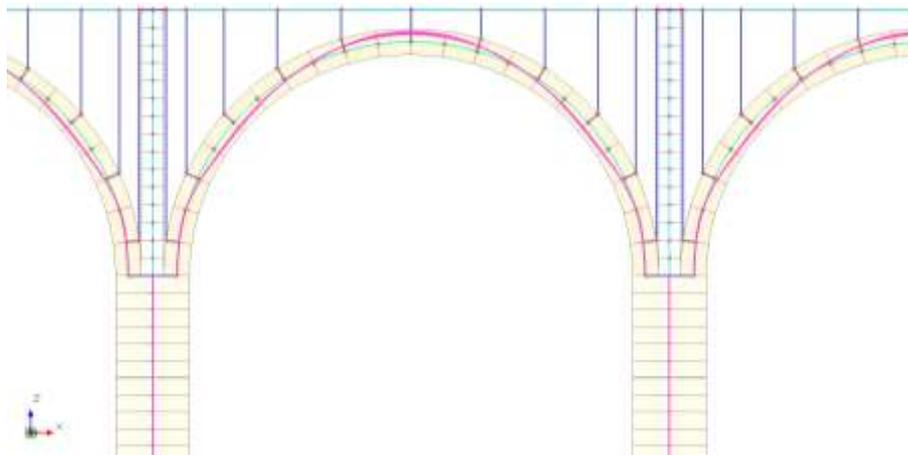


Figura 15 – Curva delle pressioni dell'arcata centrale in analisi statica non sismica, relativa alla condizione di carico trasversale, PCM 2016.

Analisi cinematica

In accordo con quanto indicato nelle istruzioni CNR-DT 213/2015 anche l'aspetto cinematico deve essere valutato. Sono molte le catene cinematiche che possono essere ipotizzate, in Aedes.PCM è possibile rappresentare facilmente anche i più complessi cinematismi utilizzando appositi strumenti per tagliare i solidi ed inserire le cerniere. Nel caso in esame è stato ipotizzato un cinematismo a 4 cerniere dell'ultima arcata. Essendo un cinematismo di tipo statico una volta inserita l'altezza dell'azione il software calcola l'intensità limite della forza affinché si attivi il cinematismo, che nel caso in esame vale 12779.991kN.

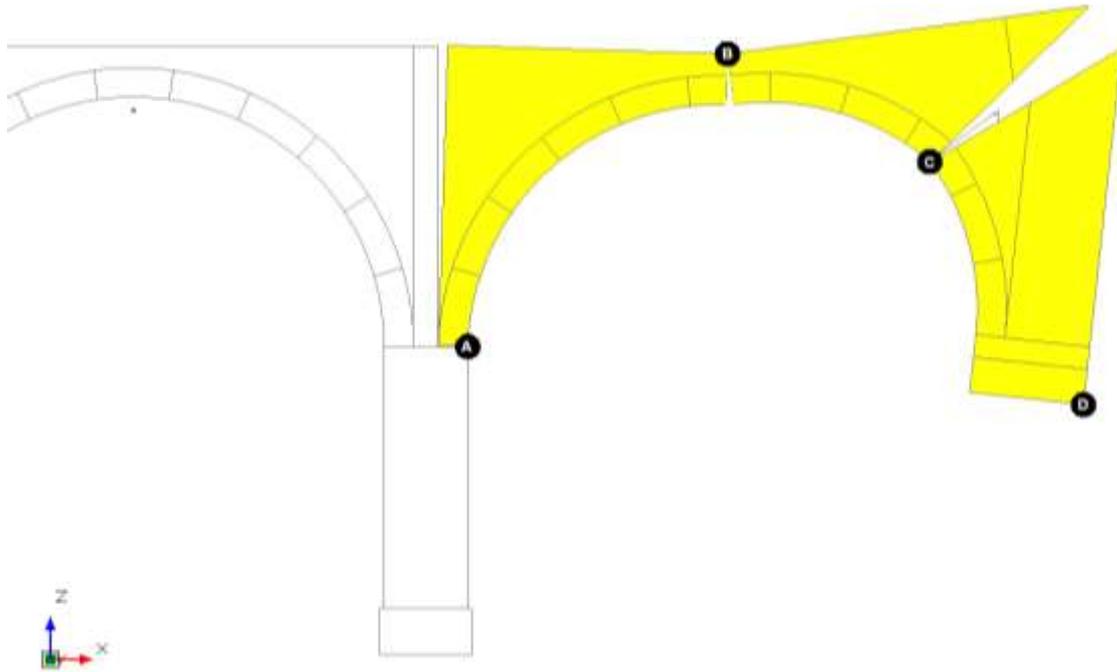


Figura 16 – Cinematismo a quattro cerniere dell'arcata finale, analisi cinematica lineare non sismica, PCM 2016.

Analisi sismica

Analisi statica non lineare

Per quanto riguarda l'analisi sismica si è scelto di eseguire un'analisi statica non lineare, in modo da valutare le modalità con cui la struttura raggiunge il collasso. La metodologia di studio degli archi implementata in Aedes.PCM è particolarmente adatta ad essere utilizzata con l'analisi statica non lineare, in quanto la posizione della curva delle pressioni può essere controllata ad ogni passo dell'analisi, constatando l'inserimento di una sconnessione nel caso in cui un elemento raggiunga il limite di resistenza. Anche in questo ambito, l'analisi è stata svolta per entrambe le configurazioni di carichi mobili, in modo da poter valutare un maggior numero di possibili collassi. Sono inoltre state scelte due differenti distribuzioni di forze per ciascun caso: la distribuzione A, proporzionale alle forze statiche; e la distribuzione E proporzionale alle masse. La struttura è stata analizzata secondo la direzione longitudinale X e trasversale Y, positive.

Nell'immagine seguente viene mostrato lo stato iniziale dell'analisi, relativo alla sola azione dei carichi verticali.

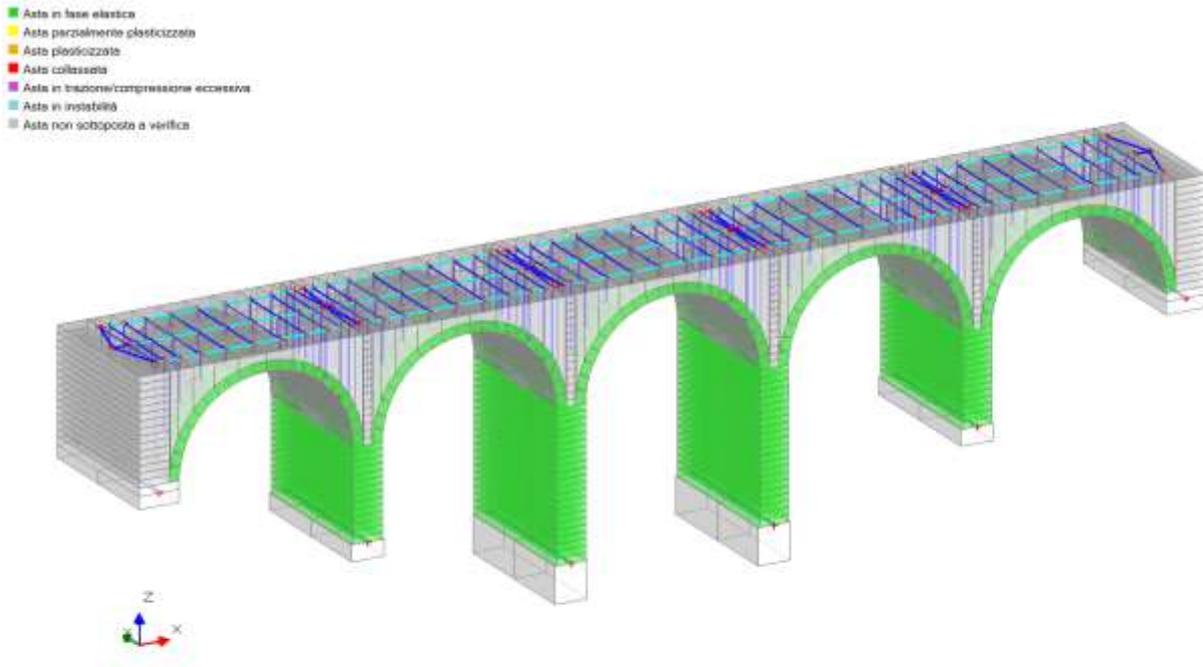


Figura 17 – Analisi sismica statica non lineare, primo passo dell'analisi, PCM 2016.

Nelle pagine seguenti vengono mostrate le curve di capacità della struttura, una configurazione intermedia e la configurazione della struttura al collasso. Uno studio così fatto porta alla valutazione delle modalità con il quale la struttura collassa, consentendoci di capirne il comportamento e suggerendo un idoneo percorso di intervento.

- Condizione di carico longitudinale

Distribuzione A direzione X



- Area in fase elastica
- Area per il momento plastificato
- Area plastificata
- Area collassata
- Area in trazione/compressione eccessiva
- Area in instabilità
- Area non sottoposta a verifica

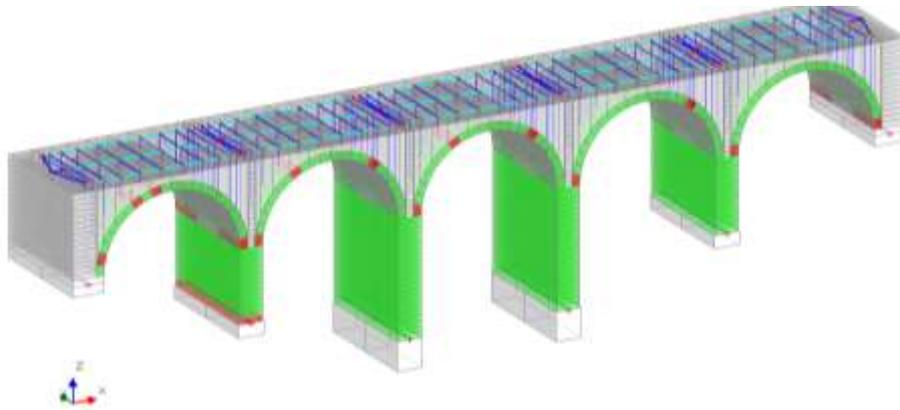
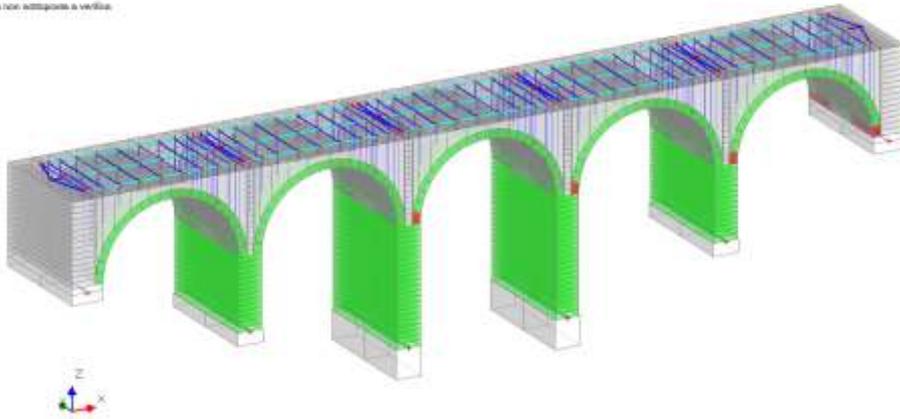


Figura 18 – Risultati dell'analisi in direzione X, in condizione di carico longitudinale, con distribuzione di forze proporzionale alle forze statiche, PCM 2016.

Distribuzione E, direzione X



- Area in fase elastica
- Area parzialmente plasticizzata
- Area plasticizzata
- Area collassata
- Area in trazione/compressione eccessive
- Area in instabilità
- Area non sottoposta a verifica

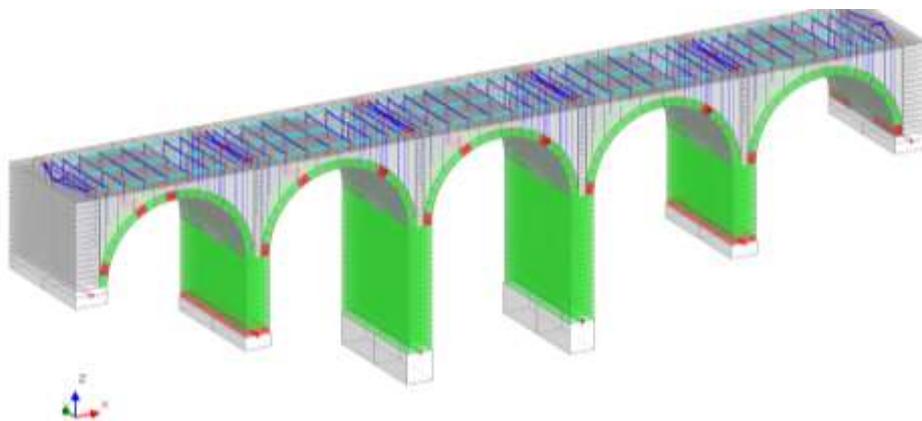
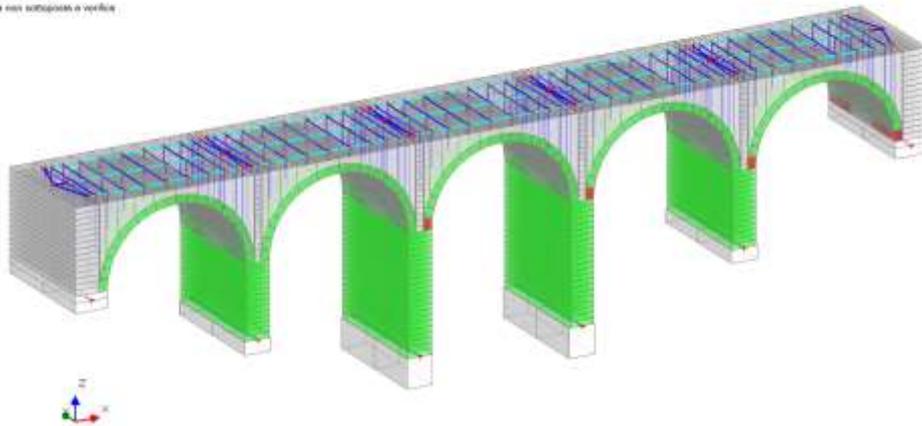


Figura 19 – Risultati dell'analisi in direzione X, in condizione di carico longitudinale, con distribuzione di forze proporzionale alle masse, PCM 2016.

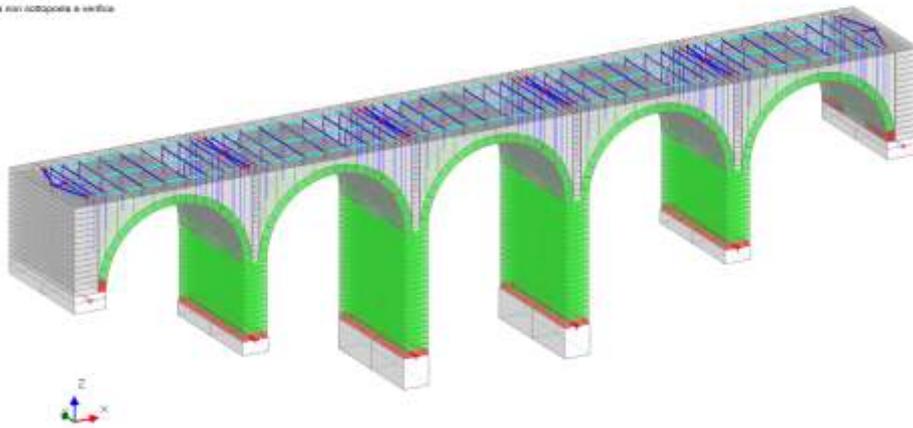
Analizzando le immagini mostrate precedentemente osserviamo come le curve di capacità e, ovviamente, lo sviluppo delle catene cinematiche siano differenti a seconda della distribuzione di forze scelta. In entrambi i casi la catena cinematica coinvolge sia l'arcate che le pile, evidenziando come una valutazione affidabile dello stato di salute della struttura necessiti di uno studio complessivo, se pur semplificato, della stessa.

- Condizione di carico trasversale

Distribuzione A direzione Y



- Asta in fase elastica
- Asta principalmente plasticizzata
- Asta plasticizzata
- Asta collassata
- Asta in trazione/compressione eccedente
- Asta in instabilità
- Asta non scoperta e verificata



- Asa in fase elastica
- Asa post-elastica plasticizzata
- Asa plasticizzata
- Asa collassata
- Asa in trazione/compresione eccessiva
- Asa in instabilità
- Asa non sottoposta a verifica

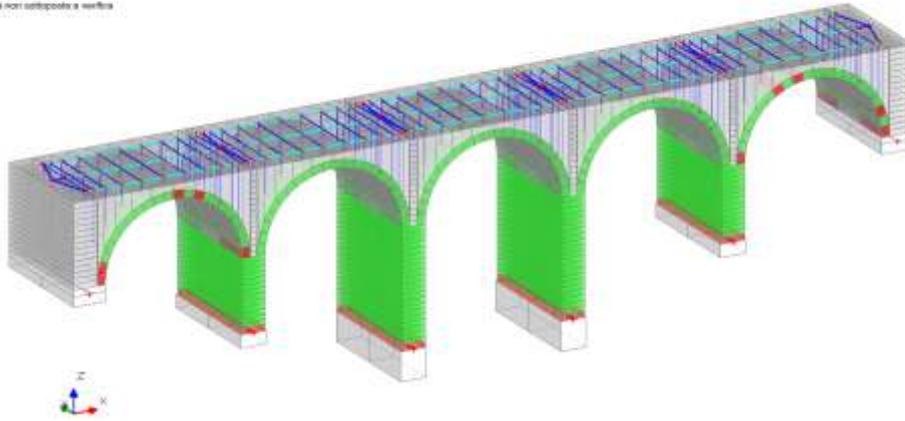


Figura 20 – Risultati dell’analisi in direzione Y, in condizione di carico trasversale, con distribuzione di forze proporzionale alle forze statiche, PCM 2016.

Distribuzione E direzione Y



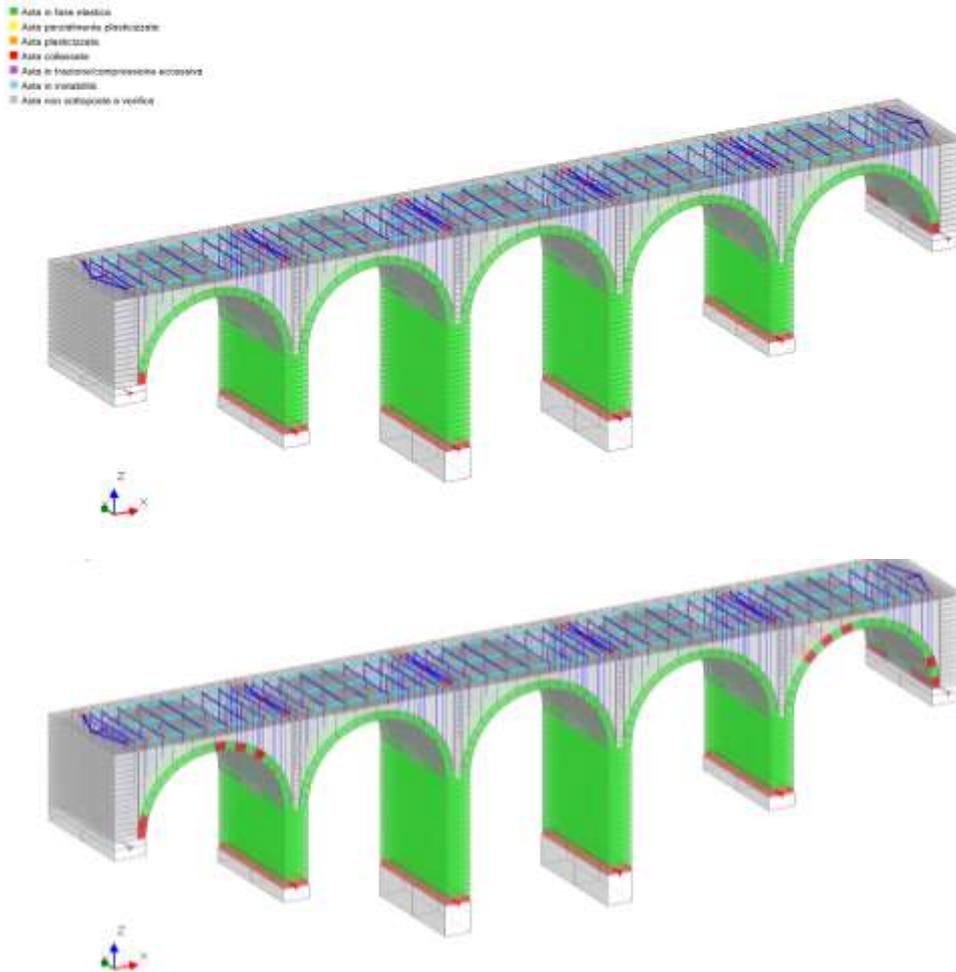


Figura 21 – Risultati dell’analisi in direzione Y, in condizione di carico trasversale, con distribuzione di forze proporzionale alle masse, PCM 2016.

Analizzando le figure precedenti osserviamo che in entrambe le analisi trasversali i primi elementi che escono dal campo elastico sono le basi delle pile, e questo è in accordo con quanto ci potevamo aspettare, immaginando di assimilare la struttura ad una serie di mensole. Successivamente, in entrambi i casi, la catena cinematica si forma una volta che anche negli archi vengono inseriti degli svincolamenti a causa della rottura dell’elemento stesso.

Conclusioni all’analisi strutturale globale sismica

I risultati delle analisi appena mostrati sono in accordo con quanto potevamo aspettarci, ed evidenziano una maggiore resistenza in direzione trasversale, dove il comportamento è principalmente influenzato dalla resistenza delle pile, in quanto la loro parziale rottura determina l’uscita dal campo elastico della struttura. L’analisi longitudinale ha mostrato una forte influenza della resistenza degli archi.

In definitiva il ponte oggetto di analisi mostra un ottimo comportamento globale, sia per quanto riguarda le analisi non sismiche, discusse al capitolo precedente, che quelle sismiche. Successivamente mostriamo la tabella riassuntiva delle verifiche sismiche.

N°Arco	Corrente	Vista	Dir.	Dir.	M	F.W	α_{SLV}	α	PGA _{CLV}	TR _{CLV}	PVR _{CLV}	α/PGA	α/TR	W _{CLV}	PGA _{CLD}	TR _{CLD}	PVR _{CLD}	α/PGA	α/TR
1	⊙	⊗	A	+X		0.219	0.461	1.690	0.213	=>2475	2.000	1.690	5.211	261	0.213	=>2475	2.000	3.344	49.500
2	⊙	⊗	A	+Y		0.613	0.416	2.311	0.213	=>2475	2.000	1.690	5.211	261	0.213	=>2475	2.000	3.344	49.500
3	⊙	⊗	E	+X		0.262	0.417	1.047	0.213	=>2475	2.000	1.690	5.211	261	0.213	=>2475	2.000	3.344	49.500
4	⊙	⊗	E	+Y		0.619	0.413	2.133	0.213	=>2475	2.000	1.690	5.211	261	0.213	=>2475	2.000	3.344	49.500

Tabella 1 – Riepilogo dei risultati delle analisi Push Over.

Analisi cinematica sismica

L'analisi cinematica in campo sismico è necessaria per chiudere il quadro di analisi da effettuare sulla struttura. Analogamente al caso statico, anche in sismica, Aedes.PCM utilizza l'analisi cinematica lineare. In questo modo verrà determinato il moltiplicatore dell'accelerazione che porta al collasso la struttura. Analogamente al caso statico è stato ricostruito il solo cinematisma dell'ultimo arco, che collega il ponte al terreno.

01. Cinematismo
Meccanismo a quattro cerniere
 $\alpha_0 = 0.579$
■ SLV
 $PGA_{CLV} / PGA_{DLY} = 0.213 / 0.126 = 1.690$
 $TR_{CLV} / TR_{DLY} = 2475 / 475 = 5.211$

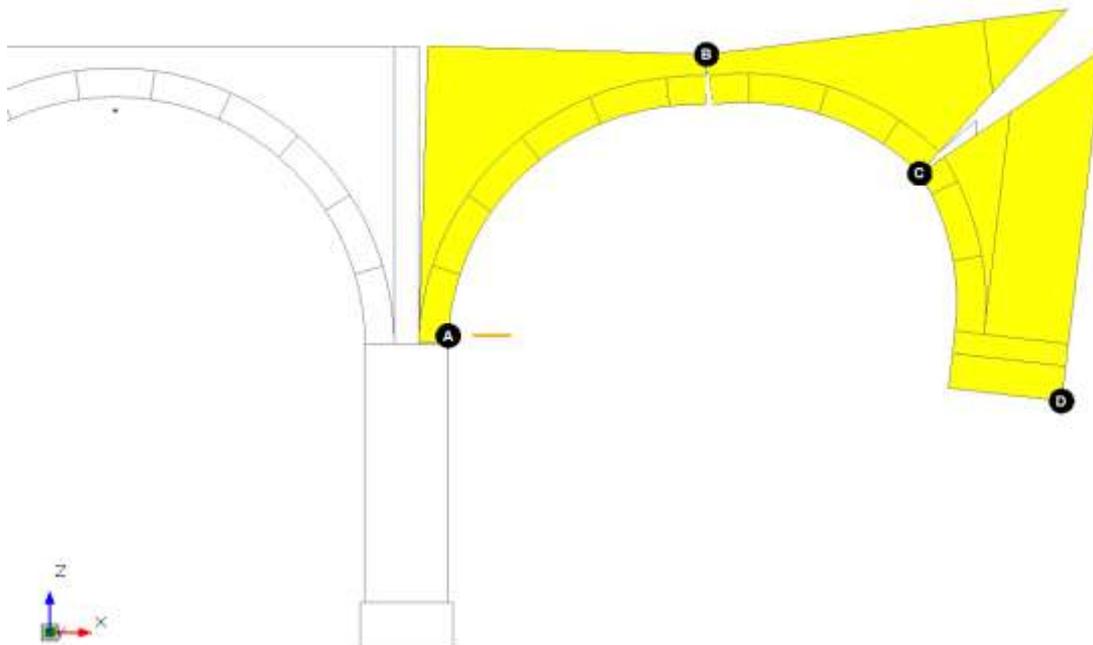


Figura 22 – Cinematismo a quattro cerniere dell'arcata finale, analisi cinematica lineare sismica, PCM 2016.

Anche dal punto di vista cinematico la struttura non presenta gravi problematiche, in quanto il valore del moltiplicatore dei carichi α_0 risulta pari a 0.579, ed un coefficiente di sicurezza in termini di PGA pari a 1.69.

Conclusioni

Concludendo possiamo affermare che la struttura è in sicurezza, sia dal punto di vista statico che sismico. Ovviamente, come ampiamente discusso nei capitoli introduttivi, lo studio del ponte deve essere completato con l'analisi locale delle componenti della struttura, il cui comportamento non può essere preso in considerazione in un modello semplificato come quello appena mostrato. Gli elementi in questione sono ad esempio: i muri di testa, la massiciata, l'azione di diffusione di riempimento e rinfiacco etc.

Vi sono vantaggi nell'uso di modellazioni semplificate per lo studio di opere complesse, ma caratterizzate da un funzionamento ben noto, come quello appena affrontato, il cui funzionamento ad arco risiede nella natura stessa della struttura. Tali vantaggi risiedono, innanzitutto, nella natura semplificata della metodologia di analisi, che a fronte di maggiori margini di sicurezza richiede una conoscenza meccanica inferiore del manufatto. Un'analisi raffinata con elementi finiti più complessi necessita sicuramente di uno studio approfondito delle caratteristiche del materiale, per determinare i parametri che definiscono il legame costitutivo scelto. Spesso tali parametri sono difficili da stimare con certezza e tale compito diventa arduo soprattutto quando si analizzano strutture vincolate. Le modellazioni raffinate sono senza dubbio molto importanti, ma deve essere chiaro per l'utilizzatore che il modello è spesso molto sensibile al valore dei parametri in input e può fornire risultati che presentano grandi variazioni rispetto a piccole modifiche dei dati. In definitiva, una modellazione agli elementi finiti molto accurata dovrebbe essere supportata da una metodologia probabilistica di gestione e quantificazione delle incertezze, affinché il risultato ottenuto possa essere considerato corretto. Un modello semplificato come quello qui presentato porta ad un risultato approssimato ed a favore di sicurezza, grazie alle molte semplificazioni, ma ha il vantaggio di essere facilmente comprensibile e controllabile, ed in tal senso può garantire la bontà dei risultati.

Bibliografia

- [1] CNR-DT 213/2015, "Istruzioni per la Valutazione della Sicurezza Strutturale di Ponti Stradali in Muratura", Ottobre 2015.
- [2] F. Pugi, Seismic analysis of masonry arch structures through the finite element model "block-joint", *4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2013)*, Kos Island, Greece, June 12-14, 2013.
- [3] D.M. Infrastrutture 14/01/2008, "Approvazione delle nuove norme tecniche per le costruzioni".
- [4] Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti, *Circolare n. 617 del 02 febbraio 2009. Istruzioni per l'applicazione delle Nuove Norme Tecniche per le costruzioni, §C8A.4*, Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana n. 47 del 26 febbraio 2009, Supplemento ordinario n.27.
- [5] M. Paradiso, G. Tempesta, S. Galassi, F. Pugi, *Sistemi voltati in muratura. Teoria e applicazioni*. DEI Tipografia del genio civile, 2007.
- [6] J. Heyman, *The Masonry Arch*. Hellis Horwood Ltd., 1982.
- [7] J. Heyman, *The Stone Skeleton*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] R. Palaninathan, P.S. Chandrasekharan, Curved beam element stiffness matrix formulation, *Computers & Structures*, **21:4**, 663-669, 1985.
- [9] W.C. Young, R.C. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, McGraw-Hill, 2002.
- [10] Aedes Software. Aedes.PCM: Progettazione di costruzioni in muratura, www.aedes.it